ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Компакты. Компактность отрезка и параллелепипеда.

Подмножество $A \subset X$ топологического пространства называется компактным, если оно обладает следующим свойством: если $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все множества U_α открыты, а индекс α пробегает любое множество (возможно, бесконечное, причем любой мощности), то найдется *конечный* набор индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такой, что $A \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$.

Теорема 1. *Отрезок* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *— компакт.*

Пример 1. Луч $[c,+\infty) \subset \mathbb{R}$ — не компакт. Действительно, $[c,+\infty) \subset \bigcup_{n=1}^\infty (c+n-1, c+n+1)$. Однако объединение конечного числа интервалов (вида $(c+n-1, c+n+1)$ или любых других) — ограниченное множество, которое не может содержать луч.

Интервал $(0,1)$ также не является компактом. Действительно, $(0,1) \subseteq \bigcup_{n=2}^\infty (1/n, 1)$. При этом все интервалы $(1/n, 1)$ вложены друг в друга: $(1/2,1) \subset (1/3,1) \subset \dots$, поэтому объединение конечного числа интервалов $\bigcup_{i=1}^N (1/n_i, 1)$ равно самому большому из них, $(1/n,1)$, где $n = \max(n_1, \dots, n_N)$. Тем самым это объединение не содержит $(0,1)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $[a,b] \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, где все $U_\alpha \subset \mathbb{R}$ открыты, и предположим, что отрезок нельзя покрыть конечным набором множеств U_α. Разделим отрезок $[a,b]$ на две половины: $[a,(a+b)/2]$ и $[(a+b)/2, b]$. По крайней мере одну из этих половин нельзя покрыть конечным набором U_α (иначе объединение двух покрытий будет конечным покрытием $[a,b]$); обозначим ее $[a_1,b_1]$ и опять разделим пополам. По крайней мере одну из этих половин нельзя покрыть конечным набором U_α; обозначим ее $[a_2,b_2]$ и продолжим процесс. Таким образом получается последовательность вложенных отрезков $[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \dots$, никакой из которых не покрывается конечным набором U_α. Длина $[a_n,b_n]$ равна $(b-a)/2^n$ и стремится к нулю при $n \to \infty$; отсюда вытекает, что отрезки имеют единственную общую точку $t \in [a,b]$.

Точка t покрыта каким-то из множеств U_α: $t \in U_{\alpha_0}$. Поскольку U_{α_0} открыто, существует интервал $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$. Возьмем n такое, что $(b-a)/2^n < \varepsilon$. Поскольку $t \in [a_n,b_n]$, получим $[a_n,b_n] \subset (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$; но это противоречит тому, что $[a_n,b_n]$ не покрывается конечным набором множеств U_α. □

Теорема 2. *Для любых* $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$ *параллелепипед* $\Pi = [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n] = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \le x_1 \le b_1, \dots, a_n \le x_n \le b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *— компакт.*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1, только делить нужно пареллелепипед каждый раз на 2^n частей — пополам по каждому измерению. Подробное доказательство — упражнение.