# ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Замкнутое множество и предельные точки.

Напомним, что подмножество топологического пространства $A \subset X$ замкнуто, если его дополнение $X \setminus A$ открыто.

*Пример* 1. Пусть $K \subset [0,1]$ — множество чисел, которые можно записать бесконечной троичной дробью, не содержащей единиц (т.е. $1/3 = 0,100\dots = 0.022\dots \in K$, поскольку вторая запись не содержит единиц). Докажем, что $K$ замкнуто. Дополнение $[0,1] \setminus K$ состоит из чисел $x = 0.x_1x_2\dots$, любая запись которых в виде троичной дроби содержит 1. Это означает, что найдется разряд, в котором стоит 1, а после него не следует период из нулей или двоек. Иными словами, существуют $n > m$ такие, что $x_m = x_n = 1$. Тогда все числа окрестности $(x - 1/3^n, x + 1/3^n)$ точки $x$ содержат единицу в разряде $m$ и, следовательно, лежат в $[0,1] \setminus K$, которое тем самым открыто.

Назовем точку $a \in X$ *предельной точкой* множества $A \subset X$, если любая окрестность $U(a)$ точки $a$ содержит по крайней мере одну точку $b \in A$, отличную от $a$ ($a \in A$ не обязательно, но возможно). Иными словами, точка $a$ предельная, если она не является изолированной в множестве $A \cup \{a\}$.

**Предложение 1.** *Если $u : \mathbb{N} \to A \subset X$ — последовательность, $a = \lim_{n\to+\infty} u_n$ и $u_n \neq a$ ни при каком $n$, то $a$ — предельная точка множества $A$. Если $X = \mathbb{R}^n$, то верно и обратное: если точка $a$ — предельная для множества $A \subset \mathbb{R}^n$, то существует последовательность $u : \mathbb{N} \to A \setminus \{a\}$ с пределом $a$.*

*Доказательство.* Пусть $u : \mathbb{N} \to A$ — последовательность. Произвольная окрестность точки $a \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} u_n$ содержит как минимум одну точку $u_n \in A$ (на самом деле — точки $u_n$ при всех $n > N$, где $N$ зависит от окрестности; правда, не факт, что они все различны...). Поскольку $u_n \neq a$, любая окрестность $a$ пересекается с $A \setminus \{a\}$ — то есть точка $a$ предельная.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Следовательно, окрестность $U_{1/k,\dots,1/k}(a)$ пересекается с $A$. Выберем произвольную точку $u_k = (u_{1k}, \dots, u_{nk}) \in U_{1/k,\dots,1/k}(a) \cap A$; тогда $a_i - 1/k < u_{ik} < a_i + 1/k$ для всех $i = 1, \dots, n$. По лемме о двух полицейских $\lim_{k\to\infty} u_{ik} = a_i$ для всех $i$, что и означает $\lim_{k\to\infty} u_k = a$. □

Еще пример предельной точки:

*Пример* 2. Если точная верхняя грань $b = \sup A$ множества $A \subset \mathbb{R}$ — действительное число (не $+\infty$, то есть множество $A$ ограничено) и не принадлежит $A$, то она является предельной точкой $A$. Действительно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует элемент $a \in A$ такой, что $a > b - \varepsilon$. Следовательно, интервал $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ имеет общую точку с множеством $A$, причем это не $b$, поскольку $b \notin A$. Тем самым $b$ — предельная точка $A$. Разумеется, то же самое верно для точной нижней грани.

**Теорема 1.** *Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

*Доказательство.* Пусть $A$ замкнуто, и $a$ — предельная точка $a$. Если $a \notin A$, то $a \in X \setminus A$. Множество $X \setminus A$ открыто и, следовательно, содержит некоторую окрестность $U(a)$ точки $a$. Но по определению предельной точки окрестность $U(a)$ должна пересекаться с $A$ и, следовательно, не может лежать в $X \setminus A$. Противоречие доказывает, что $a \in A$.

Обратно, пусть $A$ содержит все свои предельные точки. Пусть $b \in X \setminus A$ (то есть $b \notin A$). Тогда $b$ не является предельной точкой $A$ и, следовательно, существует окрестность $U(b)$ такая, что $U(b) \cap (A \setminus \{b\}) = U(b) \cap A = \varnothing$. Следовательно, $U(b) \subset X \setminus A$, и $X \setminus A$ открыто по лемме 1 лекции 10. □

**Следствие 1.** *Ограниченное замкнутое множество имеет наибольший и наименьший элементы.*

*Доказательство.* Поскольку $A$ ограничено, $b \overset{\text{def}}{=} \sup A$ — действительное число. Если $b \notin A$, то в силу примера 2 $b$ — предельная точка $A$. Поскольку $A$ замкнуто, $b \in A$ по теореме 1 — противоречие. Значит, $b = \sup A \in A$, что и означает, что $b$ — наибольший элемент множества $A$. Для наименьшего элемента аналогично. □

**Теорема 2.** *Пусть $X, Y$ — топологические пространства, $A \subset Y$, а $f : X \to Y$ — отображение, непрерывное во всех точках $X$. Тогда*

*1) Если $A$ открыто, то прообраз $f^{-1}(A) \overset{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ открыт.*
*2) Если $A$ замкнуто, то прообраз $f^{-1}(A)$ замкнут.*

*Доказательство.* Пусть вначале $A = U(a)$ — окрестность точки $a \in Y$, и пусть $b \in f^{-1}(U(a))$, то есть $f(b) \in U(a)$. По определению топологического пространства существует окрестность $V$ точки $f(b)$ такая, что $V \subset U(a)$. Поскольку $f$ непрерывно в точке $b$, существует окрестность $W$ точки $b$ такая, что $f(W) \subset V \subset U(a)$, откуда $W \subset f^{-1}(U(a))$. Согласно лемме 1 лекции 10, множество $f^{-1}(U(a))$ открыто.

Пусть теперь $A$ открыто: $A = \bigcup_\alpha U(a_\alpha)$ — объединение окрестностей точек $a_\alpha$. Тогда $f^{-1}(A) = \bigcup_\alpha f^{-1}(U(a_\alpha))$ — объединение открытых множеств, которое открыто по теореме 1 лекции 10.

Пусть теперь $A$ замкнуто, то есть $Y \setminus A$ открыто. Тогда $f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$ (докажите!) замкнуто, поскольку $f^{-1}(Y \setminus A)$ — прообраз открытого множества и, следовательно, открыт. $\square$