ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Открытые и замкнутые множества.

Подмножество топологического пространства $A \subset X$ называется *открытым*, если оно пусто или является объединением окрестностей (в конечном или бесконечном числе); подмножество называется *замкнутым*, если дополнение к нему $X \setminus A$ открыто.

Лемма 1. *Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда оно либо пусто, либо для всякой точки $a \in A$ имеется окрестность $U(a)$ этой точки такая, что $U(a) \subseteq A$.*

Доказательство. Если множество A обладает указанным свойством, то оно (если не пусто) является объединением указанных окрестностей $U(a)$, где a пробегает *все* точки множества A. Действительно, $U(a) \subseteq A$ для любой $a \in A$, откуда $\bigcup_{a \in A} U(a) \subseteq A$. С другой стороны произвольная точка $a \in U(a) \subset \bigcup_{a \in A} U(a)$, откуда $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U(a)$. Тем самым $\bigcup_{a \in A} U(a) = A$.

Обратно, пусть $A = \bigcup_\alpha U(b_\alpha)$, где b_α — какие-то точки; здесь индекс α пробегает произвольное множество — конечное или бесконечное. Пусть $a \in A$; тогда $a \in U(b_\alpha)$ для некоторого α. Тогда $a \in U(b_\alpha) \cap U(b_\alpha)$, и по определению топологического пространства существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $U(a) \subseteq U(b_\alpha) \subseteq A$, что и требовалось. □

Пример 1. $X \subset X$ для произвольного топологического пространства X открыто. Действительно, по определению топологического пространства для всякой точки $a \in X$ существует окрестность $U(a) \subseteq X$.

Пример 2. Луч $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$ — открытое подмножество: $(c, +\infty) = \bigcup_{n=0}^\infty (c+n, c+n+2)$, а интервал $(c+n, c+n+2)$ — 1-окрестность точки $c+n+1$.

Пример 3. Пусть $r > 0$ и $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$; шар $B_r(a) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2\}$ — открытое множество. Действительно, пусть $x \in B_r(a)$; возьмем $0 < \varepsilon < \frac{r^2 - ((x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2)}{3r}$, отсюда, в частности, следует, что $\varepsilon < r/3 < r$. Тогда если $y = (y_1, \dots, y_n) \in U_{\varepsilon, \dots, \varepsilon}(x)$, то есть $|y_i - x_i| < \varepsilon$ для всякого $i = 1, \dots, n$, то

$$\begin{aligned}(y_1 - a_1)^2 + \dots + (y_n - a_n)^2 = (y_1 - x_1 + x_1 - a_1)^2 + \dots + (y_n - x_n + x_n - a_n)^2 = \\ = (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 + (y_1 - a_1)^2 + \dots + (y_n - a_n)^2 + 2(x_1 - a_1)(y_1 - a_1) + \dots + 2(x_n - a_n)(y_n - a_n) \le \\ \le (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 + n\varepsilon^2 + 2nr\varepsilon < (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 + 3nr\varepsilon < r^2,\end{aligned}$$

то есть $y \in B_r(a)$. Следовательно, $U_{\varepsilon, \dots, \varepsilon}(x) \subset B_r(a)$, и шар открыт.

Теорема 1. *Объединение открытых множеств (в любом количестве, в том числе бесконечном) открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Доказательство. Объединение: пусть $V_\alpha \subset X$ — открытые множества, то есть объединения окрестностей; здесь индекс α пробегает некоторое множество — конечное или бесконечное. Тогда $\bigcup_\alpha V_\alpha$ — также объединение окрестностей: нужно взять все окрестности, объединением которых получается каждое из V_α.

Пересечение: пусть сначала открытых множеств два: V_1 и V_2. Если $V_1 \cap V_2$ пусто, то оно открыто по определению; иначе пусть $a \in V_1 \cap V_2$. По определению топологического пространства существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $U(a) \subset V_1 \cap V_2$. По лемме 1 множество $V_1 \cap V_2$ открыто. Пусть теперь $V_1, \dots, V_n \subset X$ открыты, и для любого набора из $(n-1)$ открытых множеств доказано, что их пересечение открыто. Тогда $V_1 \cap \dots \cap V_n = (V_1 \cap \dots \cap V_{n-1}) \cap V_n$ — пересечение двух открытых множеств и, следовательно, открыто. □

Напомним, что множество $A \subset X$ замкнуто, если его дополнение $X \setminus A$ открыто. Как нетрудно видеть, дополнение к объединению (в том числе бесконечному) множеств — пересечение дополнений к ним, а дополнение к пересечению — объединение дополнений: $X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha)$ и $X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha)$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Теорема 1 (для замкнутых множеств)**.** *Пересечение замкнутых множеств (в любом количестве, в том числе бесконечном) замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Пример 4. $X \subset X$ всегда замкнуто, поскольку $X \setminus X = \varnothing$ открыто.

Пример 5. Состоящее из одной (любой) точки множество $A = \{a\} \subset X$ замкнуто в любом хаусдорфовом топологическом пространстве. Действительно, $b \in X \setminus A$ означает $b \neq a$; по определению хаусдорфового пространства существуют окрестности U точки b и V точки a такие, что $U \cap V = \varnothing$. Поскольку $a \in V$, имеем $a \notin U$, то есть $U \subset X \setminus A$. По лемме 1 множество $X \setminus A$ открыто, то есть A замкнуто.

Пример 6. Луч $[c.+\infty) \subset \mathbb{R}$ замкнут, поскольку его дополнение $\mathbb{R} \setminus [c.+\infty) = (-\infty, c)$ открыто — аналогично примеру 2. Открытым луч $[c.+\infty)$ не является, поскольку содержит точку c, но не содержит никакой ее окрестности. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ также замкнут, поскольку $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ открыто по теореме 1.