# ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Свойства элементарных функций.

**Предложение 1.** *Для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство* $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

*Доказательство.* Очевидно, $\frac{\exp(x)-1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m\to\infty} E_m(x)$, то есть $E_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{(k+1)!} = 1 + \frac{x}{2} + \dots + \frac{x^m}{(m+1)!}$. Для произвольного $m$ имеем $|E_m(x) - 1| = \left|\frac{x}{2} + \dots + \frac{x^m}{(m+1)!}\right| \le \frac{|x|}{2} + \dots + \frac{|x|^m}{(m+1)!} \le |x| + |x|^2 + \dots + |x|^m \le \frac{|x|}{1-|x|}$ при $|x| < 1$. Следовательно, при $|x| < 1$ выполнено неравенство $|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1| \le \frac{|x|}{1-|x|}$ (почему?). По лемме о двух полицейских $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$, как и утверждает предложение. □

**Следствие 1.** *Функция* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *непрерывна в любой точке* $a \in \mathbb{C}$.

*Доказательство.* Пусть вначале $a = 0$. Имеем $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1 + \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1 + 0 \cdot 1$ (по предложению 1) $= 1 = \exp(0)$ — непрерывность доказана.

Для произвольного $a$ получим $\lim_{x\to a} \exp(x) = \lim_{y\to 0} \exp(a + y) = \lim_{y\to 0} \exp(a) \exp(x)$ (по следствию 2 лекции 8) $= \exp(a) \lim_{y\to 0} \exp(x) = \exp(a)$ по доказанному выше. □

**Предложение 2.** *Функция* $\exp(x)$ *при* $x \in \mathbb{R}$ *строго возрастает. Ее множество значений состоит из всех положительных чисел.*

*Доказательство.* Из следствия 2 лекции 8 вытекает, что $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x)$, то есть $\exp(-x) = 1/\exp(x)$. Из этого, в частности следует, что $\exp(x) \ne 0$ (и даже при всех $x \in \mathbb{C}$).

Пусть теперь $x \in \mathbb{R}$. Из того же следствия 2 лекции 8 вытекает, что $\exp(x) = \exp(x/2+x/2) = \exp(x/2)^2 > 0$ — то есть на вещественной оси функция принимает только положительные значения.

Очевидно, что $\exp(x) > 1+x$ при $x > 0$ (почему?), откуда $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ по лемме о двух полицейских. Из доказанного ранее следует, что $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{y\to+\infty} \exp(-y) = \lim_{y\to+\infty} 1/\exp(y) = 0$. Тем самым среди значений exp на действительной оси есть сколь угодно большие и сколь угодно близкие к нулю положительные числа. Из теоремы о промежуточном значении вытекает (как?), что функция принимает все значения $y \in (0, +\infty)$.

Если $y > x$, то $\exp(y) = \exp(x) \exp(y - x) > \exp(x)(1 + y - x) > \exp(x)$, откуда вытекает строгая монотонность функции exp на действительной оси. □

**Следствие 2.** *Существует функция* $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *обратная к* exp *на действительной оси:* $\ln \exp(x) = x$ *и* $\exp(\ln y) = y$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, +\infty)$.

*Доказательство.* Согласно предложению 2, для всякого $y \in (0, +\infty)$ существует единственное число $x \in \mathbb{R}$, для которого $y = \exp(x)$ (существование доказано, а единственность следует из строгой монотонности). Положим $\ln y = x$ по определению. □

**Следствие 3.** *1)* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ *для всех* $x, y > 0$.

*2)* $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Пункт 1 вытекает из следствия 2 из лекции 8, а пункт 2 — из предложения 1.

**Следствие 4** (следствия 3)**.** *Функция* ln *непрерывна во всех точках* $a \in \mathbb{R}$.

*Доказательство.* Пусть вначале $a = 1$. Тогда $\lim_{x\to 1} \ln x = \lim_{y\to 0} \ln(1+y) = \lim_{y\to 0} y \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 0 \cdot 1 = 0 = \ln 1$.

Для произвольного $a > 0$ имеем: $\lim_{x\to a} \ln x = \lim_{y\to 1} \ln(ay) = \lim_{y\to 1} (\ln a + \ln y) = \ln a + \lim_{y\to 1} \ln y = \ln a$ по доказанному выше. □

Пусть $a > 0$ — положительное действительно число, $b \in \mathbb{C}$ — произвольное комплексное число. Положим по определению $a^b \stackrel{\text{def}}{=} \exp(b \ln a)$; выражение называется степенью с основанием $a$ и показателем $b$. В частности, если $e \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1)$ (это традиционное обозначение; вычисления показывают, что $e \approx 2.718$), то $\exp(x) = e^x$.

**Предложение 3.** *Степень обладает следующими свойствами:*

*1)* $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

*2)* $(a^b)^c = a^{bc}$.

*3) Если* $n$ *— целое положительное число, то* $a^n = a \cdot \dots \cdot a$ *(*$n$ *сомножителей), а* $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

*Доказательство.* $a^{b+c} = \exp((b+c)\ln a) = \exp(b \ln a)\exp(c \ln a) = a^b a^c$.

$(a^b)^c = \exp(c \ln(a^b)) = \exp(c \ln \exp(b \ln a)) = \exp(bc \ln a) = a^{bc}$.

$a^n = a^{1+\dots+1}$ ($n$ слагаемых) $= a^1 \cdot \dots \cdot a^1$ ($n$ сомножителей) $= a \cdot \dots \cdot a$.

$(a^{1/n})^n = a^{n \cdot 1/n} = a^1 = a$, откуда $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. □

**Лемма 1.** *Для произвольного* $z \in \mathbb{C}$ *выполнено равенство* $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ *(черта означает комплексное сопряжение).*

Доказательство — упражнение.

Определим функции синус и косинус равенствами $\cos x = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$, $\sin x = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$. Отсюда немедленно вытекает равенство $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$.

**Предложение 4.** *1)* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

*2) Если* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\cos x, \sin x \in \mathbb{R}$, *при этом* $\cos x$ *— вещественная часть* $\exp(ix)$, *а* $\sin x$ *— мнимая. При этом* $-1 \le \cos x, \sin x \le 1$.

*3) Для всех* $x, y \in \mathbb{C}$ *имеют место равенства* $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *и* $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$.

*4) Если* $x, y \in \mathbb{R}$, *то модуль комплексного числа* $\exp(x+iy)$ *равен* $\exp(x)$.

*5)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

*Доказательство.* Из определения синуса и косинуса немедленно следует, что косинус — четная функция, а синус — нечетная: $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$. Теперь $1 = \exp(ix)\exp(-ix) = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x$. Если $x \in \mathbb{R}$, то $\overline{\cos x} = \frac{1}{2}(\overline{\exp(ix)} + \overline{\exp(ix)}) = \frac{1}{2}(\exp(\overline{ix}) + \exp(\overline{-ix}))$ (по лемме 1 $= \frac{1}{2}(\exp(-ix) + \exp(ix)) = \cos x$, откуда $\cos x \in \mathbb{R}$; для синуса аналогично. Но тогда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \le 1$, так что $-1 \le \cos x \le 1$, и, опять-таки, аналогично для синуса. Теперь из равенства $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ вытекает, что $\cos x = \operatorname{Re}\exp(ix)$ и $\sin x = \operatorname{Im}\exp(ix)$.

Для произвольных $x, y \in \mathbb{C}$ получим $\cos(x+y) + i \sin(x+y) = \exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$ и, аналогично, $\cos(x+y) - i \sin(x+y) = \exp(-i(x+y)) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$. Отсюда вытекают формулы сложения для синуса и косинуса.

При $x, y \in \mathbb{R}$ получаем $\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)$ и $\overline{\exp(x+iy)} = \exp(\overline{x+iy}) = \exp(x-iy) = \exp(x)\exp(-iy)$, откуда $|\exp(x+iy)|^2 = \exp(x+iy)\overline{\exp(x+iy)} = \exp(x)^2 \exp(iy)\exp(-iy) = \exp(x)^2$, откуда $|\exp(x+iy)| = \exp(x)$ (оба числа положительные).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2i} \lim_{x\to 0} \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{x} = \frac{1}{2i}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\exp(ix)-1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-ix)-1}{x}\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\left(\lim_{y\to 0} \frac{\exp(y)-1}{-iy} - \lim_{y\to 0} \frac{\exp(y)-1}{iy}\right) = \frac{1}{2i} \cdot 2i \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\exp(y)-1}{y} = 1.$$

$1 - \cos x = 1 - \cos(x/2 + x/2) = \cos^2(x/2) + \sin^2(x/2) - \cos^2(x/2) + \sin^2(x/2) = 2\sin^2(x/2)$, откуда $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. □

**Предложение 5.** *1) Множеством значений* $\{\exp(ix) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *функции* $\exp$ *на мнимой оси является окружность* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

*2) Существует число* $\pi > 0$ *такое, что* $\sin \pi n = 0$ *и* $\cos \pi(n + 1/2) = 0$ *при всех целых* $n$. *Число* $2\pi$ *является периодом синуса и косинуса, а число* $2\pi i$ *— периодом экспоненты.*

*Доказательство.* Возьмем $x \in \mathbb{R}$ такой, что $\sin x \overset{\text{def}}{=} y > 0$ (почему такой существует?); тогда $\sin(-x) = -y$. По теореме о промежуточном значении (а синус — функция, непрерывная во всех точках, поскольку $\exp(x)$ непрерывна) на отрезке $[-x, x]$ синус принимает все значения из отрезка $[-y, y]$. Поскольку $|\exp(it)| = 1$ в силу пункта 4 предложения 4, для каждой точки $z \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — дуга окружности, концы которой имеют ординату $y$ и $-y$, существует $t \in [-x, x]$ такое, что $\exp(it) = z$.

Умножение на $z$ представляет собой поворот на угол, равный аргументу $z$. С другой стороны, если $w = \exp(is)$, то $wz = \exp(is)\exp(it) = \exp(i(s+t))$. Отсюда следует, что если точка окружности может попасть на дугу $\mathcal{A}$, сделав несколько поворотов на угол $\arg z$, то она также принадлежит образу $\{\exp(ix) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Но таким свойством обладают *все* точки окружности.

Тем самым утверждение про образ доказано и, следовательно, существует число $\pi > 0$ такое, что $\sin \pi = 0$ и $\cos \pi = -1$. Отсюда вытекает, что $\sin(x + \pi) = \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi = -\sin x$ и, в частности, $\sin n\pi = 0$ при всяком $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $\sin(x + 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x$, так что $2\pi$ является периодом синуса;

для косинуса аналогично. Отсюда вытекает, что $\exp(2\pi i) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$, откуда $\exp(x + 2\pi i) = \exp(x)\exp(2\pi i) = \exp(x)$, то есть $2\pi i$ — период экспоненты. $\square$