ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Экспонента.

Пусть $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$ — последовательность векторов (иными словами, $u_0, u_1, \dots \in \mathbb{R}^m$). *Рядом* с общим членом u_k называется последовательность $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$, где $a_n = u_0 + \dots + u_n$. Предел $\lim_{n\to+\infty} a_n$ называется суммой ряда; если он лежит в $\mathbb{R}^m$ (а не равен ∞), то ряд называется сходящимся. Ряд обычно обозначается $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$; его сумма (неудобно, но традиционно) обозначается так же.

Пусть $x \in \mathbb{C}$; обозначим $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$.

Теорема 1. *Для любого $x \in \mathbb{C}$ этот ряд сходится.*

Сумма этого ряда называается экспонентой.

Доказательство. Пусть вначале $x \geq 0$ — вещественное неотрицательное число. Последовательность $a_n(x)$ в этом случае принимает вещественные значения и возрастает, так что для доказательства теоремы в этом случае достаточно доказать, что множество ее значений ограничено сверху.

Лемма 1. *Для всякого $y > 0$ предел $\lim_{n\to\infty} \frac{y^n}{n!} = 0$.*

Доказательство леммы. Пусть $C = [y]$ (целая часть) и $n > C$. Тогда $0 < \frac{y^n}{n!} < \frac{y}{1} \dots \frac{y}{C} \frac{y}{C+1} \dots \frac{y}{n} \leq y^C \cdot \frac{y}{n} = y^{C+1}\frac{1}{n}$. Последовательность в правой части стремится к нулю при $n \to \infty$ (напомним, что y^{C+1} зависит только от y, а от n не зависит), тем самым утверждение леммы вытекает из леммы о двух полицейских. □

(Продолжение доказательства теоремы для $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) Применим утверждение леммы к $y = 2x$. Получим, что $\frac{2^n x^n}{n!} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, существует такое натуральное N, что при $n > N$ имеет место неравенство $\frac{2^n x^n}{n!} < 1$, то есть $\frac{x^n}{n!} < 1/2^n$. Отсюда вытекает, что $a_n = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{2^k!} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + 1$ — тем самым ограниченность и сходимость последовательности доказана.

Пусть теперь $x \in \mathbb{C}$ — произвольное комплексное число.

Вначале — важное замечание про вектор-функции:

Лемма 2. *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, $a \in X$, $L \in \mathbb{R}^m$, а $f : A \to \mathbb{R}^m$ — отображение. Тогда $\lim_{x\to a} f(x) = L$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$.*

Заметим, что первый предел это предел вектор-функции $A \to \mathbb{R}^m$, а второй — предел функции $A \to \mathbb{R}$.

Доказательство. "Только тогда". Пусть $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$, где $L = (L_1, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U точки a такая, что если $x \in U \setminus \{a\}$, то $f(x) \in B_\varepsilon(L) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x - L| < \varepsilon\}$. Множество $B_\varepsilon(L) \subset L$ — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром L. Рассмотрим произвольную окрестность $V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}(L) = \{y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid |y_1 - L_1| < \varepsilon_1, \dots, |y_m - L_m| < \varepsilon_m\} \subset \mathbb{R}^m$ точки $L \in \mathbb{R}^m$, и пусть $\varepsilon > 0$ — число, меньшее всех $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$. Тогда если $y = (y_1, \dots, y_m) \in B_\varepsilon(L)$, то для произвольного $i = 1, \dots, m$ получаем $|y_i - L_i| = \sqrt{|y_i - L_i|^2} \leq \sqrt{|y_1 - L_1|^2 + \dots + |y_m - L_m|^2} = |y - L| < \varepsilon < \varepsilon_i$, откуда $B_\varepsilon(L) \subset V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}(L)$. Выберем окрестность $U(a)$ по числу ε, как указано выше, тогда для всякого $x \in U(a)$, $x \neq a$, получим $f(x) \in B_\varepsilon(L)$, откуда $f(x) \in V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}$. По определению это означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

"Тогда": пусть $\lim_{x\to a} f(x) = L$, то есть для всех $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ найдется окрестность $U(a)$ такая, что если $x \in U(a) \setminus \{a\}$, то $f(x) \in V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}$ (обозначения те же, что и в случае "только тогда"). По аналогии с предыдущим случаем видно, что достаточно для всякого $\varepsilon > 0$ найти $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ такие, что $V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m} \subset B_\varepsilon(L)$. Возьмем $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_m = \varepsilon/m$. Тогда если $y = (y_1, \dots, y_m) \in V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}$, то для всех $i = 1, \dots, m$ имеет место неравенство $|y_i - L_i| < \varepsilon_i = \varepsilon/m$, откуда $|y - L| = \sqrt{|y_1 - L_1|^2 + \dots + |y_m - L_m|^2} \leq \sqrt{m \cdot \varepsilon^2/m^2} = \varepsilon/\sqrt{m} < \varepsilon$, то есть $y \in B_\varepsilon(L)$ — следовательно, $V_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m} \subset B_\varepsilon(L)$, как и требовалось. Дальнейшее рассуждение — как в предыдущем случае. □

Следствие 1. *Вектор-функция $f : A \to \mathbb{R}^n$, где $A \subset X$, фундаментальна в точке $a \in X$, если и только если $\lim_{(x,y)\to(a,a)} |f(x) - f(y)| = 0$.*

Доказательство. Доказательство получается применением леммы 2 к отображению (вектор-функции) $F : A \times A \to \mathbb{R}^m$, заданному формулой $F(x, y) = f(x) - f(y)$. □

Лемма 3. *Пусть $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$ — последовательность векторов; рассмотрим последовательность чисел $|u_0|, |u_1|, \dots \in \mathbb{R}$. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ сходится (имеет предел, отличный от $+\infty$), то и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится.*

(В этом случае говорят, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *абсолютно сходится*, и лемма формулируется "если ряд абсолютно сходится, то он сходится".)

Доказательство. Положим $a_n = u_0 + \dots + u_n \in \mathbb{R}^m$ и $c_n = |u_0| + \dots + |u_n| \in \mathbb{R}$. Поскольку c_n сходится, она фундаментальна в точке ∞: $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}(c_m - c_n) = 0$. Согласно лемме 2, $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} |c_m - c_n| = 0$. Предположим, что $m \le n$ (обратный случай разбирается так же), тогд $0 \le |a_n - a_m| = |u_{m+1} + \dots + u_n| \le |u_{m+1}| + \dots + |u_n| = |c_n - c_m|$. По лемме о двух полицейских $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} |a_n - a_m| = 0$, и в силу леммы 2, послеовательность a_n фундаментальна — таким образом, сходится. □

(Продолжение доказательства теоремы 1) Теорема для произвольного $x \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ непосредственно вытекает из леммы 3: $\left|\frac{x^k}{k!}\right| = \frac{|x|^k}{k!}$, но $|x|$ — положительное действительное число, так что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ сходится по доказанному ранее. □

Произведением рядов $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, где $u_n, v_n \in \mathbb{C}$, называется ряд $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$, где $w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Теорема 2. *Если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, и $A, B \in \mathbb{C}$ — их суммы, то их произведение — сходящийся ряд с суммой AB.*

Доказательство. Положим $a_n \stackrel{\text{def}}{=} u_0 + \dots + u_n$, $b_n \stackrel{\text{def}}{=} v_0 + \dots + v_n$, так что $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Последовательности a_n и b_n фундаментальны (поскольку сходятся); согласно следствию 1, $\lim_{(m,n)\to(+\infty,+\infty)} |a_n - a_m| = \lim_{(m,n)\to(+\infty,+\infty)} |b_n - b_m| = 0$. Следовательно, существует N такое, что при $n > m > N$ выполнены неравенства $|a_n - a_m| = |u_{m+1} + \dots + u_n| < \varepsilon$, $|b_n - b_m| = |v_{m+1} + \dots + v_n| < \varepsilon$. В силу абсолютной сходимости рядов существует константа $C > 0$ такая, что $|u_0| + \dots + |u_n| < C$, $|v_0| + \dots + |v_n| < C$ для любого n.

Положим $c_n = w_0 + \dots + w_n = \sum_{k+l\le n} u_k w_l$. Пусть $n > 2N+1$, так что $[n/2] > N$ и $n - [n/2] > N$. Тогда $c_n - a_{[n/2]} b_{n-[n/2]} = P + Q$, где $P = \sum_{l\ge[n/2]} \sum_{k\le n-l} u_k v_l$ и $Q = \sum_{k\ge N-[n/2]} \sum_{l\le n-k} u_k v_l$. Имеем $|P| \le |u_0(v_{[n/2]} + \dots + v_n) + u_1(v_{[n/2]} + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_{n-[n/2]} v_{[n/2]}| \le |u_0|\,|v_{[n/2]} + \dots + v_n| + \dots + |u_{n-[n/2]}|\,|v_{[n/2]}| \le \varepsilon(|u_0| + \dots + |u_{n-[n/2]}|) < C\varepsilon$ и аналогично $|Q| < C\varepsilon$, откуда $|c_n - a_{[n/2]} b_{n-[n/2]}| < 2C\varepsilon$.

Из теоремы о пределе произведения и леммы 2 следует, что $\lim_{n\to\infty} |a_{[n/2]} b_{n-[n/2]} - AB| = 0$. Следовательно, существует $N' > 2N+1$ такое, что если $n > N'$, то $|a_{[n/2]} b_{n-[n/2]} - AB| < \varepsilon$. Следовательно, для таких n получаем $|c_n - AB| < \varepsilon(2C+1)$, откуда $\lim_{n\to\infty} c_n = AN$ по лемме 2 □

Следствие 2. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *для всех* $x, y \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $u_k = \frac{x^k}{k!}$, $v_k = \frac{y^k}{k!}$, тогда $w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$. □