ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Фундаментальные отображения.

Определение 1. Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, $f : A \to \mathbb{R}$ — функция. Определим функцию $F : (A \setminus \{a\})^2 \to \mathbb{R}$ формулой $F(x,y) = f(x) - f(y)$. Функция f называется фундаментальной в точке $a \in X$, если $\lim_{(x,y)\to(a,a)} F(x,y) = 0$.

Теорема 1. *Предел $L \stackrel{def}{=} \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ существует тогда и только тогда, когда f фундаментальна в точке a.*

Замечание. Обратим внимание, что предел здесь — действительное число, а с бесконечным пределом теорема неверна. Действительно, $\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$, но отображение $f(x) = 1/x$ в точке $a = 0$ не фундаментально. Действительно, если бы имело место равенство $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 0$, то функцию $F(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ можно было бы продолжить в точку $(0,0)$, полагая $F(0,0) = 0$, и она была бы непрерывной в этой точке. Тогда по теореме о непрерывности композиции для произвольных непрерывных функций $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $p(0) = q(0) = 0$, функция $F(p(t), q(t))$ была бы непрерывна в точке $t = 0$ (и принимала там значение 0). Но $F(t, 2t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t} \not\to 0$ при $t \to 0$.

Доказательство. Пусть вначале $L = \lim_{x\to a} f(x)$. Положим по определению $f(a) = L$ — на существование и значение предела функции f это не влияет (значение в точке не влияет на предел в этой точке), а на фундаментальность, т.е. равенство нулю предела функции F — также не влияет, поскольку F не определена, если хотя бы один из аргументов равен a. Теперь функция f непрерывна в точке a.

Отображение $p_1 : X \times X \to X$, заданное формулой $p_1(x,y) = x$, непрерывно во всех точках (проверьте!). То же самое верно для отображения $p_2(x,y) = y$. Тогда функция $g_1 \stackrel{\text{def}}{=} f \circ p_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ задана формулой $g_1(x,y) = f(x)$; она непрерывна в точке (a,a) как композиция непрерывных отображений. Отсюда вытекает равенство $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x) = \lim_{(x,y)\to(a,a)} g_1(x,y) = g_1(a,a) = f(a) = L$. Аналогично доказывается, что $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x) = L$. Но тогда $\lim_{(x,y)\to(a,a)} F(x,y) = L - L = 0$.

Обратно, пусть функция f фундаментальна в точке a. Зафиксируем $\varepsilon > 0$; тогда существуют окрестности U_1, U_2 точки a такие, что если $(x,y) \in U_1 \times U_2$ (то есть $x \in U_1$, $y \in U_2$), то $-\varepsilon < f(x) - f(y) < \varepsilon$. По определению топологического пространства существует окрестность U точки a, содержащаяся в $U_1 \cap U_2$. Окрестности U_1, U_2 можно заменить на любые их под-окрестности — в частности, на U — без нарушения неравенства. То есть получается, что если $x, y \in U$, то $-\varepsilon < f(x) - f(y) < \varepsilon$.

Для каждой окрестности $V \subseteq U$ точки a положим по определению $S(V) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in V} f(x)$. (Заметим, что $S(V) \in \mathbb{R}$, а не равно $+\infty$ — докажите!) После этого положим по определению $L = \inf\{S(V) \mid V \subseteq U$— произвольная окрестность точки $a\}$. По определению точной нижней грани это означает, в частности, что существует окрестность $V \subseteq U$ точки a такая, что $L \le S(V) \le L + \varepsilon$. Если теперь $x \in V$, то тем самым $x \in U$ и, следовательно, $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$ для всех $y \in U$ — в частности, для всех $y \in V$. Беря в этом неравенстве точную верхнюю грань по y, получим $f(x) - \varepsilon \le S(V) \le f(x) + \varepsilon$, то есть $S(V) - \varepsilon \le f(x) \le S(V) + \varepsilon$; но правое неравенство на самом деле можно усилить, поскольку $S(V)$ — точная верхняя грань: $S(V) - \varepsilon \le f(x) \le S(V)$. Отсюда и из неравенства $L \le S(V) \le L + \varepsilon$ (см. выше) вытекает, что $L - \varepsilon \le f(x) \le L + \varepsilon$ для произвольного $x \in V$. Следовательно, $L = \lim_{x\to a} f(x)$. □

Фундаментальными бывают не только функции: если $f : A \to \mathbb{R}^n$, где $A \subset X$, то понятие фундаментальности в точке $a \in X$ определяется так же, как для функций ($f(x) - f(y)$ определено, если $f(x), f(y) \in \mathbb{R}^n$!).

Следствие 1. *Отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$, где $A \subset X$, фундаментально в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда предел $L \stackrel{def}{=} \lim_{x\to a} f(x)$ существует.*

Доказательство. Отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$ представляет собой набор функций $(f_1, \dots, f_n)$, где $f_i : A \to \mathbb{R}$ для всех i. Структура топологического пространства в декартовом произведении такова, что $\lim_{x\to a} f(x) = (\lim_{x\to a} f_1(x), \dots, \lim_{x\to a} f_1(x))$. Вычитание векторов $f(x) - f(y)$ также производится покомпонентно. Отсюда вытекает, что отображение f фундаментально в точке a тогда и только тогда, когда в точке a фундаментальны все функции $f_1, \dots, f_n$, и сходится к $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to a} f_i(x) = L_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Осталось применить теорему 1. □

Пример 1 (задача 5 листка 1). Пусть q — комплексное число; рассмотрим последовательность $a_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \in \mathbb{C}$. Тем самым a — отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; нас интересует, существует ли (и чему равен) предел $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим несколько случаев.

1. $|q| < 1$. Пусть $q^n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Имеют место неравенства $0 \le |x_n|, |y_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |q^n| = |q|^n$; при этом известно, что $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ (это предел последовательности *действительных* чисел). По лемме о двух полицейских получаем, что $\lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0 = \lim_{n\to+\infty} |y_n|$ и, следовательно, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} y_n$ (докажите!). Из определения сходимости в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ получаем, что $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ и, следовательно, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$.

2. $|q| > 1$. Рассмотрим множество $\widetilde{\mathbb{C}}$, состоящее из $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ и еще одной точки ∞. Введем в $\widetilde{\mathbb{C}}$ структуру топологического пространства, взяв в качестве окрестностей ∞ множества $U_R(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$. Нетрудно проверить (проделайте! это очень похоже на $\widetilde{\mathbb{R}}$), что $\widetilde{\mathbb{C}}$ — хаусдорфово топологическое пространство.

Лемма. *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ и $a \in X$. Для функции (комплекснозначной) $f : A \to \widetilde{\mathbb{C}}$ предел $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ (второй предел это предел обычной, действительнозначной, функции в пространстве $\overline{\mathbb{R}}$).*

Доказательство. Оба утверждения про пределы означают, что $\forall R > 0 \exists U(a) \forall z \in U(a) \cap A : |f(x)| > R$ ($U(a) \subset X$ — окрестность точки a). $\square$

Поскольку $|q| > 1$, имеем $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$. Для любых комплексных чисел $z, w \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство $|z + w| \ge |z| - |w|$ (проверьте!) — следовательно, $|a_n| = \left|\frac{q^n}{1-q} + \frac{-1}{1-q}\right| \ge \left|\frac{q^n}{1-q}\right| - \frac{1}{|1-q|} = \frac{|q|^n}{|1-q|} - \frac{1}{|1-q|}$. Тем самым $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, и из леммы вытекает, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3. $|q| = 1$. Здесь есть два подслучая: $q = 1$ и $q \ne 1$. Если $q = 1$, то, очевидно, $a_n = n$ (формула $a_n = \frac{1-q^n}{1-q}$ здесь неприменима), откуда $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \in \widetilde{\mathbb{C}}$ (или $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$). Если же $q \ne 1$, то $|q^n| = |q|^n = 1$ при любом n, откуда вытекает неравенство $|1 - q^n| \le |1| + |q^n| = 2$ и, следовательно, $|a_n| = \frac{|1-q^n|}{|1-q|} \le \frac{2}{|1-q|}$. Тем самым последовательность a_n ограничена, так что $\lim_{n\to+\infty} a_n \ne \infty$.

Покажем, что никакое комплексное число также не является пределом a_n (и тем самым эта последовательность предела не имеет). Действительно, если $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{C}$, то последовательность a_n должна быть фундаментальной по следствию 1: $\lim_{(p,q)\to(\infty,\infty)} a_p - a_q = 0$. Из теоремы о непрерывности композиции вытекает, что если p_n, q_n — две последовательности натуральных чисел, для которых $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, то $\lim_{n\to+\infty} a_{p_n} - a_{q_n} = 0$. Возьмем $p_n = n + 1$, $q_n = n$ — для них пределы равны $+\infty$. Но, с другой стороны, докажем, что $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - a_n = \lim_{n\to+\infty} q^n$ не равен нулю (на самом деле он не существует, но нам это неважно). Действительно, пусть $q^n = x_n + iy_n$. Если $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n$. Тогда существует c такое, что при $n > c$ выполнены неравенства $|x_n| < 1/2$ и $|y_n| < 1/2$. Но при таких n имеем $|q^n|^2 = |x_n|^2 + |y_n|^2 < 1/2$, что противоречит равенству $|q^n| = |q|^n = 1$ для любого n. Тем самым последовательность a_n не фундаментальна и, следовательно, не сходится.