ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Действительные числа (окончание). Принцип вложенных отрезков. Теорема о промежуточном значении.

1. Доказательство теоремы 1 лекции 5

1. Пункт 4. Пусть вначале $x, y > 0$, и пусть x_n, y_n — десятичные приближения (с точностью до n-го знака) чисел x и y. Из правила "умножения столбиком" выводится индукцией по числу знаков (проделайте!), что $x_n y_n = y_n x_n$ Тогда $xy = \sup_n(x_n y_n) = \sup_n(y_n x_n) = yx$. Если $x < 0$, $y > 0$, то $-x > 0$ и $xy = -((-x)y) = -(y(-x)) = yx$; остальные комбинации знаков рассматриваются так же.

Аналогично (даже проще) доказывается пункт 1.

2. Пункт 5. Аналогично пункту 4, достаточно доказать равенство при $x, y, z > 0$. Из правила умножения столбиком вытекает, что у чисел $(xy)_n$ и $x_n y_n$ целая часть и первые n цифр дробной части сопадают. Тогда у чисел $x_n(yz)_n$ и $x_n(y_n z_n)$ также совпадают первые n цифр. Но $x_n(y_n z_n) = (x_n y_n)z_n$ (индукция по n — проделайте!), откуда вытекает, что у $x_n(yz)_n$ и $(xy)_n z_n$ первые n цифр тоже одинаковые. Отсюда вытекает, что $x(yz) = \sup_n x_n(yz)_n = \sup_n(xy)_n z_n = (xy)z$.

Аналогично доказываются пункты 2 и 7.

3. Пункты 3, 6 и 9 очевидны.

4. Пункт 8 Ясно, что достаточно доказать утверждение при $x > 0$. Пусть целая часть числа x содержит k знаков (то есть $10^{k-1} \le x < 10^k$). Тогда у числа $x/10^{n+k}$ первые n знаков после точки равны нулю. Это означает, что в арифметической прогрессии $a_{jn} = jx/10^{n+k}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, найдется число, большее или равное 1 и меньшее, чем $1 + 1/10^n$. Обозначим это число $b_n = j_n x/10^{n+k}$. С другой стороны, для любого $p > 0$ имеем $1 \le b_{n+p} = j_{n+p}x/10^{n+p+k} < 1+1/10^{n+p} < 1+1/10^n$, откуда $|b_n - b_{n+p}| = |x(j_n/10^{n+k} - j_{n+p}/10^{n+k+p})| \, 1/10^n$. Поскольку $x \ge 10^{k-1}$, первые $n + k - 1$ знаков чисел $y_n \overset{\text{def}}{=} j_n/10^{n+k}$ и $y_{n+p} \overset{\text{def}}{=} j_{n+p}/10^{n+k+p}$ совпадают при любом p. Тем самым десятичные знаки в последовательности $y_1, y_2, \dots$ стабилизируются (n-й знак перестает меняться после $(n - k + 1)$-го члена), из чего вытекает (почему?), что эта последовательность имеет предел y.

Имеем $1 \le y_n x \le 1 + 1/10^n$, откуда $1 \le yx \le 1 + 1/10^n$ для любого n, что возможно только при $yx = 1$.

2. Принцип вложенных отрезков

Теорема 1. *Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ — вложенные друг в друга отрезки действительной прямой. Тогда их пересечение $\bigcap_n [a_n, b_n] \ne \varnothing$ — иными словами, существует точка x, принадлежащая всем отрезкам. Если $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, то эта точка единственная, и $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Пример 1. Если заменить отрезки интервалами или даже полуинтервалами, то теорема будет неверна: $\bigcap_n (0, 1/n] = \varnothing$. Также не годятся полуинтервалы с бесконечным концом (лучи): $\bigcap_n [n, +\infty) = \varnothing$. А вот отрезки с бесконечными концами удовлетворяют теореме: $\bigcap_n [n, +\infty] = \{+\infty\}$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим точки $A \overset{\text{def}}{=} \sup\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ и $B \overset{\text{def}}{=} \inf\{b_n \mid n = 1, 2, \dots\}$. Поскольку отрезки вложены, их левые концы образуют возрастающую последовательность: $a_1 \le a_2 \le \dots$, а правые — убывающую: $b_1 \ge b_2 \ge \dots$. Тем самым для любых n и k имеем: если $k \ge n$, то $a_n \le a_k \le b_k$, а если $k \le n$, то $a_n \le b_n \le b_k$ — в любом случае получается, что любой элемент a_n меньше любого элемента b_k. Отсюда вытекает, что $a_n \le A \le B \le b_k$ при всех n и k (и, в частности, A и B — действительные числа, а не бесконечности). Следовательно, если $x \in [A, B]$, то $a_n \le x \le b_n$ для всех n — то есть $x \in \bigcap_n [a_n, b_n]$.

Доказательство второго утверждения — упражнение. $\square$

3. Теорема о промежуточном значении

Теорема 2. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и пусть $C \in [f(a), f(b)]$ (или $[f(b), f(a)]$). Тогда существует точка $x \in [a, b]$ (возможно, не единственная), для которой $f(x) = C$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и для всякого $t \in [a,b]$ имеет место либо неравенство $f(t) < C$, либо неравенство $f(t) > C$. Предположим для определенности, что $f(a) < f(b)$ (и, следовательно, $f(a) < C < f(b)$); обратный случай разбирается аналогично.

Обозначим $a_0 = a$, $b_0 = b$, и пусть $c_1 = (a_0 + b_0)/2$. Если $f(c_1) < C$, то положим $a_1 = c_1, b_1 = b_0$, а если $f(c_1) > C$, то наоборот: $a_1 = a_0$, $b_1 = c_1$. Затем положим $c_2 = (a_1 + b_1)/2$ и проделаем ту же процедуру, определив a_2 и b_2, и т.д. В результате получится последовательность вложенных отрезков $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$, для которой $f(a_n) < C < f(b_n)$ для всех n. Длина n-го отрезка $b_n - a_n = (b-a)/2^n \to 0$ при $n \to +\infty$, откуда по теореме 1 существует и единственна точка x такая, что $\{x\} = \bigcap_n [a_n, b_n]$ и $x = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

В силу непрерывности функции f имеем $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ и $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$. Из первого равенства и неравенства $f(a_n) < C$ вытекает, что $f(x) \le C$, а из второго, аналогично, — что $f(x) \ge C$. Но это возможно только при $f(x) = C$, что противоречит предположению, что такого не бывает. $\square$

Пример 2. Пусть $a > 0$. Докажем, что существует и единственно число $\sqrt{a} > 0$ такое, что $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, и что если $a > 1$, то $1 < \sqrt{a} < a$, а если $0 < a < 1$, то $a < \sqrt{a} < 1$.

Пусть вначале $a > 1$ (второй случай — упражнение); рассмотрим отрезок $[1, a]$. Функция $f(x) = x^2$ принимает на левом конце отрезка значение $f(1) = 1 < a$, а на правом $f(a) = a^2 > a$. По теореме 2 существует $x \in [1, a]$ такое, что $x^2 = a$. В силу монотонности функции f такая точка единственна: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, так что только одно из двух значений может быть a.