ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Действительные числа (продолжение).

Предложение 1. *1) Если одно из чисел x, y, или оба, — конечные десятичные дроби, то результат сравенения не зависит от того, какое из двух представлений (с периодом 0 или с периодом 9) выбрано.*

2) Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \neq y$, то обязательно либо $x < y$, либо $y < x$, но не одновременно.

3) Если $x < y < z$, то $x < z$.

Доказательство. Свойство 3: пусть $x = a_0.a_1a_2\dots, y = b_0.b_1b_2\dots, z = c_0.c_1c_2\dots$. Неравенство $x < y$ означает, что $a_n < b_n$, но $a_i = b_i$ при $i < n$; неравенство $y < z$ — что $b_m < c_m$, но $b_i = c_i$ при $i < m$. Пусть k — меньшее из чисел n, m. Тогда $a_i = b_i = c_i$ при $i < k$, но либо $a_k < b_k \le c_k$ (если $k = n$), либо $a_k \le b_k < c_k$ (если $k = m$); в обоих случаях $a_k < c_k$. Тем самым доказано, что $x < z$.

Свойство 1: пусть $y = b_0.b_1b_2\dots$ и $a_0.a_1\dots a_{n-1}a_n99\dots < y$. Это означает, что $b_i = a_i$ при $i = 0,\dots,k$, но $a_{k+1} < b_{k+1}$. Тогда $k \le n-1$: действительно, если $k \ge n$, то $a_{k+1} = 9$ не может быть меньше b_{k+1}. Но в этом случае одновременно и $a_0.a_1\dots a_{n-1}(a_n+1)00\dots$ — неравенства не меняются. Обратное утверждение (если $a_0.a_1\dots a_{n-1}(a_n+1)00\dots < y$, то $a_0.a_1\dots a_{n-1}a_n99\dots < y$) доказывается аналогично. Также аналогично доказывается утверждение, где двумя записями обладает y, а не x.

Свойство 2 очевидно. □

Доказательство теоремы 1 лекции 4 (окончание). Пусть теперь множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху числом $L \in \mathbb{R}$; тогда множество $A_0 \subset \mathbb{Z}$, элементами которого являются *целые части* всех чисел из X, ограничено сверху тем же L. Следовательно, в A_0 имеется наибольшее число; обозначим его a_0. Также обозначим $X_0 \subset X$ множество всех элементов X, целая часть которых равна a_0.

Пусть теперь $A_1 \subset \{0, 1, \dots, 9\}$ — множество *первых цифр* всех чисел $x \in X_0$. Это множество конечное, так что в нем есть наибольший элемент; обозначим его a_1. Кроме того, обозначим $X_1 \subset X_0$ множество всех элементов $x \in X_0$, у которых первая цифра равна a_1 (то есть множество всех элементов $x \in X$, у которых стандартная запись начинается с $a_0.a_1$, а дальше что угодно).

Продолжая этот процесс, получим на n-ом шаге целое число a_0 и набор цифр $a_1\dots a_n$, а также непустое множество X_n, состоящее из всех элементов $x \in X$, начинающихся с $a_0.a_1\dots a_n$. Теперь мы можем сделать очередной шаг: A_{n+1} — множество $(n+1)$-ых цифр всех элементов $x \in X_n$; a_{n+1} — наибольший элемент (конечного) множества A_{n+1}, и X_{n+1} — множество тех $x \in X_n$, у которых $(n+1)$-я цифра равна a_{n+1}. Очевидно, $X_{n+1} \subset X_n$ и непусто.

Тем самым получается действительное число $\alpha = a_0.a_1a_2\dots \in \mathbb{R}$. Докажем, что $\alpha = \sup X$.

Действительно, пусть $x \in X$. Если $x \in X_n$ для всех n, то $x = \alpha$. В противном случае пусть m — наименьшее натуральное число такое, что $x \notin X_m$. Тогда $x \in X_{m-1}$, что означает, что десятичная запись x начинается на $a_0.a_1\dots a_{m-1}$ и, следовательно, m-я цифра x не превосходит a_m. Но поскольку $x \notin X_m$, эта цифра не может равняться a_m — следовательно, она строго меньше a_m, откуда вытекает, что $x < \alpha$. Таким образом, в любом случае $x \le \alpha$, что означает, что α ограничивает множество X сверху.

Пусть теперь $\beta < \alpha$; десятичная запись $\beta = b_0.b_1b_2\dots$, и пусть k — наименьшее натуральное число такое, что $b_k < a_k$; предыдущие цифры β такие же, как у α: $b_0 = a_0, b_1 = a_1, \dots, b_{k-1} = a_{k-1}$. Множество $X_k \subset X$ непусто и состоит из всех элементов $x \in X$, десятичная запись которых начинается на $a_0.a_1\dots a_k$. Для любого из чисел $x \in X_k$ имеем $\beta < x$, так что число β не ограничивает множество X сверху. Тем самым $\alpha = \sup X$.

Тем самым доказано, что у любого множества точная верхняя грань существует. □

Пример 1. Пусть функция f с вещественными значениями определена на отрезке: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и монотонно возрастает на нем: если $x, y \in [a, b]$ и $x \le y$, то $f(x) \le f(y)$. Тогда предел $\lim_{x\to b} f(x)$ существует и равен $M = \sup f([a, b)) = \sup\{f(x) \mid a \le x < b\}$.

Для доказательства заметим вначале, что множество $f([a, b))$ ограничено сверху числом $f(b)$ (в силу монотонного возрастания) и, следовательно, имеет точную верхнюю грань — действительное число M. Пусть $U_\varepsilon(M) = (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ — произвольная окрестность точки M. Согласно определению точной верхней грани существует число $t \in f([a, b))$ такое, что $t > M - \varepsilon$; по определению множества $f([a, b))$ имеем $t = f(u)$ для некоторого $u \in [a, b)$. Пусть $V = (u, 2b - u)$ — окрестность точки b; в силу монотонного возрастания и определения точной верхней грани имеем $M - \varepsilon < t < f(x) < M < M + \varepsilon$, то есть $f(x) \in U$ при всех $x \in V \cap [a, b) = (u, b)$. Тем самым доказано утверждение про предел.

Часто это утверждение встречается в такой форме: пусть f монотонно возрастает и определена на некотором интервале, включающем точки a и b (например, на всем $\mathbb{R}$). Тогда утверждение применимо к функции $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, которая является *ограничением* функции f на этот отрезок (т.е. $g(x) = f(x)$ при всех $x \in [a, b]$, а вне отрезка функция g не определена). Тогда $\lim_{x \to b} g(x)$ называется пределом функции f в точке b слева и обозначается $\lim_{x \to b-0} f(x)$; как доказано выше, он существует. Заметим, что предел $\lim_{x \to b} f(x)$ может и не существовать — мы это уже видели на примере (монотонно возрастающей) функции $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$.

Аналогично определяется предел справа.

Пример 2. Утверждение, аналогичное примеру 1: пусть $x_1, x_2, \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность действительных чисел, множество значений которой ограничено сверху. Тогда $\lim_{n \to \infty} x_n$ существует и равен точной верхней грани упомянутого множества значений. Доказательство практически не отличается от примера 1; подробности — упражнение.

Определим теперь сложение и умножение действительных чисел и докажем, что они обладают всем известными свойствами. Мы будем считать, что определение и свойства сложения и умножения конечных десятичных дробей нам известны (продумайте, как они все-таки определяются и доказываются! особое внимание обратите на отрицательные числа).

Пусть $x, y \in \mathbb{R}$; обозначим x_n, y_n конечные десятичные дроби, полученные обрезанием x и y на n-ой цифре.

Определение 1. $x + y \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x_n + y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(нетрудно видеть, что множество $\{x_n + y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху — докажите! — так что точная верхняя грань является действительным числом, а не равна $+\infty$).

Пусть $x = a_0.a_1a_2\ldots$. Тогда противоположным к x назовем число $-x \stackrel{\text{def}}{=} b_0.b_1b_2\ldots$, где $b_0 = -a_0 - 1$, а $b_i = 9 - a_i$ для любого $i \geq 1$. Очевидно, $-(-x) = x$.

Лемма 1. *1) $x > 0$ тогда и только тогда, когда $-x < 0$.*

2) $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Число $y = -x$ — единственное, обладающее свойством $x + y = y + x = 0$.

3) $x < y$ тогда и только тогда, когда $y + (-x) > 0$.

Доказательство леммы — упражнение.

Определение 2. Если $x, y > 0$, то $xy \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x_n y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Если одно или два числа x, y отрицательны, то произведение xy определяется по стандартному правилу знаков (например, $xy = -(x(-y))$, если $y < 0 < x$).

Теорема 1. *Сложение, умножение и сравнение действительных чисел обладают следующими свойствами:*

1) $x + y = y + x$,
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3) $x + 0 = x$,
4) $xy = yx$,
5) $x(yz) = (xy)z$,
6) $x \cdot 1 = x$,
7) $x(y + z) = xy + xz$,
8) $\forall x \neq 0 \exists y : xy = 1$.
9) Если $x, y > 0$, то $x + y > 0$, $xy > 0$.