# ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Точная верхняя грань. Определение действительного числа.

**1. Точные верхние и нижние грани** В этом разделе мы будем работать с множеством $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Мы будем считать, что $-\infty < a < +\infty$ для любого действительного числа $a \in \mathbb{R}$; неравенства между действительными числами — как обычно.

**Определение 1.** Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ (т.е. $X$ — множество действительных чисел плюс, возможно, элементы $+\infty$ и $-\infty$). Говорят, что элемент $M \in \overline{\mathbb{R}}$ ограничивает множество $X$ сверху, если $a \leq M$ для всякого $a \in X$.

Очевидно, каждое множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено сверху элементом $M = +\infty$. Если множество $X$ ограничено сверху *действительным числом* (и, следовательно, само состоит из действительных чисел и, возможно, $-\infty$), то оно называется ограниченным сверху.

Аналогично определяется число, ограничивающее множество снизу, и множество, ограниченное снизу. Множество называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу; такое множество состоит только из действительных чисел.

*Пример* 1. Отрезок $[0,1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ ограничен сверху числом 1 (или любым числом, бо́льшим 1), а снизу — числом 0 (или любым числом, меньшим 0) — тем самым это ограниченное множество. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел ограничено сверху $+\infty$, снизу — $-\infty$, и только ими.

**Определение 2.** Наименьший элемент $M \in \overline{\mathbb{R}}$, ограничивающий сверху непустое множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, называется *точной верхней гранью* множества $X$ (обозначение: $M = \sup X$). Иными словами, элемент $M \in \overline{\mathbb{R}}$ называется точной верхней гранью $X$, если он ограничивает множество $X$ сверху, но ни один элемент $m \in \overline{\mathbb{R}}$, меньший $M$, этим свойством не обладает: , $\forall a \in X\, a \leq M$, но $\forall m < M \exists b \in X\, b > m$.

Аналогично определяется понятие точной нижней грани (обозначение: $\inf X$).

*Пример* 2. $1 = \sup[0,1]$. Действительно, если $a \in [0,1]$, то $a \leq 1$ — следовательно, 1 ограничивает отрезок сверху. С другой сторон, если $m < 1$, то $m$ не ограничивает отрезок сверху, т.к. $1 \in [0,1]$.

Аналогично доказывается равенство $0 = \inf[0,1]$.

Обобщением примера 2 является следующее очевидное замечание:

**Предложение 1.** *Если множество $X$ содержит наибольший элемент, то он является его точной верхней гранью. Обратно, если $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup X \in X$, то $M$ — наибольший элемент множества $X$.*

Однако точная верхняя грань может и не принадлежать множеству (тогда, согласно предложению 1, множество не имеет наибольшего элемента):

*Пример* 3. Пусть $X = (0,1) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Тогда $1 = \sup X$: ясно, что число 1 ограничивает $(0,1)$ сверху. Если $0 < m < 1$, то существует $a \in (0,1)$ такое, что $a > m$ — например, $a = (1+m)/2$. Число $m \leq 0$, очевидно, также не ограничивает интервал сверху. Также верно равенство $0 = \inf(0,1)$, доказательство аналогично.

Если теперь $X = (0,1) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ — множество рациональных чисел (чисел вида $m/n$, где $m, n$ — натуральные числа), лежащих на интервале $(0,1)$, то также верны равенства $\sup X = 1$ и $\inf X = 0$. Действительно, 1 ограничивает $X$ сверху, поскольку $X \subset (0,1)$. Пусть $m < 1$; для доказательства того, что $m$ не ограничивает $X$ сверху, требуется доказать, что на интервале $(m,1)$ имеется по крайней мере одно рациональное число. Для доказательства рассмотрим последовательность (арифметическую прогрессию) $0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$, где $n$ — натуральное число, большее $1/(1-m)$. Прогрессия состоит из рациональных чисел; шаг ее равен $1/n < 1-m$, а длина интервала $(m,1)$ равна $1-m$ — следовательно, по крайней мере один член прогрессии принадлежит интервалу.

*Пример* 4. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ — возрастающая функция, т.е. функция, обладающая таким свойством: если $x \leq y$ и $x, y \in A$, то $f(x) \leq f(y)$. Пусть $M = \sup F$, где $F = \{f(x) \mid x \in A\}$ (множество значений функции $f$). Докажем тогда, что $M = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Предположим вначале, что $M \in \mathbb{R}$. Пусть $U_\varepsilon(M) = (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$ — окрестность $M$. Число $M - \varepsilon < M = \sup F$ по определению точной верхней грани не ограничивает сверху множество $F$ — то есть существует элемент $y \in F$ такой, что $y > M - \varepsilon$.

По определению множества $F$ должно быть $y = f(c)$ для некоторого $c \in A$. Поскольку функция $f$ — возрастающая, при $x > c$, $x \in A$, получается $f(x) > f(c) > M - \varepsilon$. В то же время $M$ ограничивает множество $F$ сверху, так что $f(x) \le M < M + \varepsilon$. Тем самым при $x \in U_c(+\infty) \cap A = (c, +\infty) \cap A$ имеем $f(x) \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon) = U_\varepsilon(M)$. Это и означает, что $M = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Доказательство в случае, когда $M = +\infty$, остается в качестве упражнения. Еще одно упражнение — доказать обратное утверждение: если $f$ — возрастающая функция и $M = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, то $M = \sup F$, где $F = \{f(x) \mid x \in A\}$.

**Теорема 1.** *Всякое подмножество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ имеет точную верхнюю грань, причем ровно одну.*

*Доказательство.* Докажем вначале единственность. Пусть $M_1 = \sup X$ и $M_2 = \sup X$. Если $M_1$ и $M_2$ не равны, то одно из них меньше другого; например, $M_1 < M_2$. Поскольку $M_2$ — точная верхняя грань множества $X$, то $M_1$ не ограничивает $X$ сверху. Но тогда $M_1$ само не может быть точной верхней гранью.

При доказательстве существования разберем два случая: существует *действительное* число $L$, ограничивающее множество $X$ сверху, и такого числа не существует. Во втором случае имеем $\sup X = +\infty$: действительно, $+\infty$ ограничивает $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ сверху (поскольку оно ограничивает сверху все $\overline{\mathbb{R}}$), а если $m < +\infty$, то $m$ — действительное число (или $-\infty$) и, по предположению, $X$ сверху не ограничивает.

В первом же случае мы сталкиваемся с принципиальной трудностью: а что такое действительное число? До сих пор отсутствие формального определения нам не мешало: мы пользовались только некоторыми свойствами действительных чисел (например, правилом сложения неравенств) — поэтому чем бы ни были действительные числа, наши доказательства правильны, коль скоро эти свойства выполнены. Но теперь ситуация иная: нужно доказать *существование* действительного числа, не имея никакой конструкции для него. Для этого требуется определение.

Доказательство теоремы прервано, закончим позднее... $\square$

**2. Действительные числа** Действительным числом называется выражение $a_0.a_1a_2\ldots$, состоящее из целого числа $a_0 \in \mathbb{Z}$ и бесконечной последовательности элементов $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (цифр); при этом считается, что если $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 9$, но $a_n \ne 9$ (или $n = 0$), то действительное число $a_0.a_1a_2\ldots a_n99\ldots$ это то же самое, что $a_0.a_1a_2\ldots(a_n+1)\,00\ldots$. Число $a_0 \in \mathbb{Z}$ называется целой частью действительного числа; число $0.a_1a_2\ldots$ — его дробной частью. Множество всех действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

Если $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$, то цифры $a_{n+1}$ и следующие обычно не пишут; такое называется конечной десятичной дробью.

Отметим, что приведенное выше определение действительного числа совпадает со стандартной записью его в виде бесконечной десятичной дроби только для неотрицательных чисел. Для представления отрицательных чисел мы берем отрицательное $a_0 \in \{-1, -2, \ldots\}$, а дробную часть считаем положительной: то, что обычно обозначается $-0.120\ldots$, мы обозначаем $(-1).8800\ldots$. Это позволяет, во-первых, не хранить отдельно знак числа (он определяется знаком целой части), а во-вторых, облегчает определение сравнения чисел:

**Определение 3.** Пусть $x, y \in \mathbb{R}$: $x = a_0.a_1a_2\ldots$ и $y = b_0.b_1b_2\ldots$, и пусть $x \ne y$. Говорят, что число $x$ меньше числа $y$ (обозначение $x < y$), если существует такое $n \ge 0$, что $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, но $a_n < b_n$.

Запись $x \le y$ означает, что $x < y$ или $x = y$.

Свойства действительных чисел и их сравнения будут разобраны в следующей лекции.