ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Топологическое пространство. Интеграл Римана.

1. Хаусдорфовы топологические пространства. В лекциях 1 и 2 мы определили непрерывность (и пределы) отображений между несколькими различными объектами: подмножествами $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^n$. Все эти определения похожи друг на друга; более того, понятно, что действуя аналогичным образом, мы можем определить непрерывность и других отображений (например, из/в $\overline{\mathbb{R}}^n$ и т.п.). Возникает подозрение, что все это частные случаи одного и того же понятия. Хаусдорфово топологическое пространство — та естественная "среда", в котором определена непрерывность отображения и предел.

Чтобы задать *хаусдорфово топологическое пространство*, необходимо зафиксировать множество X (элементы которого называются точками; например, $X = \mathbb{R}$ и точки — действительные числа) и для каждой точки $a \in X$ зафиксировать набор подмножеств $U \subset X$ множества X, называемых окрестностями точки a (например, окрестность точки — действительного числа $a \in \mathbb{R}$ — это интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ с центром в этой точке). При этом предполагается, что точки и окрестности обладают следующими простыми свойствами:

1) Любая окрестность точки a содержит точку a.
2) У любой точки $a \in X$ есть хотя бы одна окрестность.
3) Если U_1 и U_2 — окрестности (возможно, разных точек), и $a \in U_1 \cap U_2$, то существует окрестность U точки a такая, что $U \subset U_1 \cap U_2$.
4) Если $a_1, a_2 \in X$ — различные точки, то существуют окрестность U_1 точки a_1 и окрестность U_2 точки a_2, не имеющие общих точек: $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Нетрудно проверить (проделайте!), что $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\widetilde{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{R}^n$ с окрестностями, определенными в лекциях 1 и 2, — хаусдорфовы топологические пространства.

Определение отображения, непрерывного в точке, и определение предела можно теперь перенести безо всяких изменений на случай отображений $f : A \to Y$, где Y — какое-нибудь хаусдорфово топологическое пространство, а A — подмножество произвольного хаусдорфова топологического пространства X (вообще говоря, отличного от Y).

Упражнение 1. Сформулируйте это определение и проверьте, что предложение 1 лекции 1 (о непрерывности композиции) верно вместе с доказательством для произвольных отображений $f : A \to Y$.

Предложение 2 лекции 1, версия для хаусдорфовых топологических пространств. *Пусть X, B — хаусдорфовы топологические пространства, $A \subset X$, $f : A \to B$ — отображение и $a \in X$. Предположим, что точка $a \in A$ не изолирована в множестве $A \cup \{a\} \subset X$: для любой окрестности $V \subset X$ точки a найдется точка $b \in V \cap A \setminus \{a\}$ (иными словами, $b \in V$ такое, что $b \in A$ и $b \neq a$).*

Тогда если предел $\lim_{x\to a} f(x) \in B$ существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть это не так: $u_1, u_2 \in B$ — пределы, и $u_1 \neq u_2$. По свойству 4 из определения хаусдорфова топологического пространства вытекает, что у u_1, u_2 имеются непересекающиеся окрестности U_1, U_2. По определению предела существуют окрестности V_1, V_2 точки a такие, что если $x \in \mathring{V}_1$, то $f(x) \in U_1$, а если $x \in \mathring{V}_2$, то $f(x) \in U_2$.

Согласно свойству 3 из определения хаусдорфова топологического пространства, точка $a \in X$ обладает окрестностью V такой, что $V \subset V_1 \cap V_2$. По условию теоремы точка a не изолирована в $A \cup \{a\}$ — следовательно, существует точка $x \in V \cap A$, отличная от a. Но тогда $x \in \mathring{V}_1$ и $x \in \mathring{V}_2$, откуда вытекает, что $f(x) \in U_1$ и $f(x) \in U_2$ одновременно. Это противоречит тому, что окрестности U_1 и U_2 не пересекаются. $\square$

2. Произведения топологических пространств. Вектор-функции и функции многих переменных. Пусть X и Y — два топологических пространства. Напомним, что декартовым произведением $X \times Y$ (как множеств) называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$. Например, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ — (координатная) плоскость. Отображение $f : X \times Y \to Z$ называют (если Z — множество чисел) функцией двух переменных (первая из X, вторая из Y) — в точности как для отображений $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Аналогично определяется декартово произведение любого конечного числа (трех и более) множеств и функция трех и более переменных.

Существует стандартный способ наделить $X \times Y$ структурой топологического пространства:

Определение 1. Для всех $a \in X$, $b \in Y$ окрестностью точки $(a,b) \in X \times Y$ называется множество $U(a) \times V(b) = \{(x,y) \mid x \in U(a), y \in V(b)\}$, где $U(a) \subset X$ и $V(b) \subset Y$ — произвольные окрестности точек a и b соответственно.

Нетрудно проверить (проделайте!), что таким образом действительно определено топологическое пространство. Структуру топологического пространства на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ мы определяли именно таким образом: $U_{p,q}(a,b) = U_p(a) \times U_q(b) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Аналогично определяется структура топологического пространства на декартовом произведении любого конечного числа топологических пространств — например, на $\mathbb{R}^n$.

Отображение $f : X \to Y \times Z$ сопоставляет каждому элементу $a \in X$ пару элементов $(g(a), h(a))$, где $g(a) \in Y$ и $h(a) \in Z$. Таким образом, отображение $f : X \to Y \times Z$ — не что иное как пара отображений $g : X \to Y$ и $h : X \to Z$. Аналогично, отображение множества A в произведение n пространств — просто набор отображений из A в каждое из пространств в отдельности. Отображения $f : A \to \mathbb{R}^n$ называются n-мерными вектор-функциями (определенными на множестве A).

Предложение 1. *Пусть X, B, C — хаусдорфовы топологические пространства и $A \subset X$. Тогда вектор-функция $f = (g,h) : A \to B \times C$ непрерывна в точке $a \in A$ тогда и только тогда, когда оба отображения g, h непрерывны в точке a.*

Доказательство. "Тогда": предположим, что g и h — отображения, непрерывные в точке $a \in A$, и пусть $V \times W$ — окрестность точки $f(a) = (g(a), h(a)) \in B \times C$; здесь $V \subset B$ и $W \subset C$ — окрестности точек $b \in B$ и $c \in C$ соответственно. В силу непрерывности g существует такая окрестность $U_1 \subset X$ точки a, что если $x \in U_1 \cap A$, то $g(x) \in V$. Аналогично, в силу непрерывности h существует такая окрестность $U_2 \subset X$ той же точки a, что если $x \in U_2 \cap A$, то $h(x) \in W$. Теперь $a \in U_1 \cap U_2$; по определению топологического пространства существует окрестность $U \subset U_1 \cap U_2$ точки a. Если $x \in U \cap A$, то условия $g(x) \in V$ и $h(x) \in W$ выполнены одновременно, что и означает $f(x) \in V \times W$. Тем самым непрерывность f в точке a доказана.

"Только тогда": предположим, что f — непрерывная вектор-функция, и пусть $V \subset B$ и $W \subset C$ — произвольные окрестности точек $g(a) \in B$ и $h(a) \in C$ соответственно. Тогда $V \times W \subset B \times C$ — окрестность точки $f(a) = (g(a), h(a))$. В силу непрерывности f найдется окрестность $U \subset X$ точки a такая, что если $x \in U \cap A$, то $f(x) = (g(x), h(x)) \in V \times W$, что означает $g(x) \in V$ и $h(x) \in W$. Тем самым доказана непрерывность в точке a функций g и h (окрестность U одна и та же для обеих). □

Следствие 1. *Если функции $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ и $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $a \in A_1 \cap A_2$, то функции $f_1 + f_2 : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$ и $f_1 f_2 : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$ также непрерывны в точке a.*

Доказательство. Согласно предложению 1, отображение $F = (f_1, f_2) : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}^2$ непрерывно в точке a. Согласно предложению 1 лекции 1 и примеру 4 лекции 2, функция $f_1 + f_2 = \alpha \circ F$ (напомним, что α — "функция сложения": $\alpha(x,y) = x + y$) непрерывна в той же точке. Согласно предложению 1 лекции 1 и примеру 5 лекции 2, функция $f_1 f_2 = \mu \circ F$ также непрерывна в точке a (μ — "функция умножения": $\mu(x,y) = xy$). □

Упражнение 2. Если вы не разбирали доказательство мелким шрифтом предложения 1, то проверьте самостоятельно (непосредственно по определению), что сумма и произведение непрерывных функций непрерывны.

Следствие 2 (следствия 1)**.** *Если* $\lim_{x\to a} f_1(x) = u_1$ *и* $\lim_{x\to a} f_2(x) = u_2$, *то* $\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = u_1 + u_2$ *и* $\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = u_1 u_2$. *Короче (но менее точно): предел суммы равен сумме пределов, предел произведения равен произведению пределов.*

Упражнение 3. Сформулируйте самостоятельно и докажите аналогичное утверждение про предел разности и частного.

Упражнение 4. Как обобщить результаты следствия 2 и упражнения 3 на случай, когда один или оба предела бесконечны?

3. Пространство разбиений и интеграл Римана. Вот еще один полезный пример хаусдорфова топологического пространства: это множество $\mathfrak{I}[0,1]$, элементами которого являются всевозможные возрастающие конечные последовательности $X = (x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = 1)$ (для всех натуральных N; иногда они называются разбиениями отрезка $[0,1]$), а также дополнительный элемент ∞ ("идеальное разбиение"). Окрестностью произвольной последовательности X будем называть просто множество $\{X\}$ (тем самым это изолированная точка), а окрестностью ∞ называется множество $U_\varepsilon(\infty)$ (где $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число), состоящее из ∞ и всех последовательностей (разбиений) $X = (x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = 1)$, для которых разность между любыми двумя последовательными членами меньше ε: $x_{i+1} - x_i < \varepsilon \ \forall i = 0, \ldots, 2N-1$.

Пример 1. Пусть $N : \mathfrak{I}[0,1] \setminus \{\infty\} \to \mathbb{N}$ — функция, значение которой на разбиении $X = (x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{2N-1} < x_{2N} = 1)$ равно N. Очевидно, что если $X \in U_\varepsilon(\infty)$, то выполнено неравенство $N(X) \geq 1/(2\varepsilon)$.

Отсюда по лемме о двух полицейских (почему она верна для функций на пространстве $\mathfrak{I}[0,1]$?) вытекает, что $\lim_{X\to\infty} N(X) = +\infty$.

Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, а $X \in \mathfrak{I}[0,1]$ — разбиение (но не ∞). Обозначим $I(f,X)$ следующее выражение, называемое суммой Римана:

$$I(f,X) = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{2i+1})(x_{2i+2} - x_{2i}).$$

Предел $\lim_{X\to\infty} I(f,X)$ (если он существует, конечно — это зависит от функции f) называется интегралом (Римана) от функции f по отрезку $[0,1]$ и обозначается $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Если функция f положительна во всех точках, то $I(f,X)$ — площадь "ступенчатой фигуры" — объединения прямоугольников Π_i, $i = 0,\dots,N-1$, где прямоугольник Π_i ограничен слева и справа вертикальными прямыми $x = x_{2i}$ и $x = x_{2i+2}$ (и тем самым его ширина равна $x_{2i+2} - x_{2i}$, снизу — осью абсцисс $y = 0$, а сверху — горизонтальной прямой $y = f(x_{2i+1})$ (т.е. его высота равна $f(x_{2i+1})$). Когда разбиение X стремится к ∞, ступенчатая фигура становится все более и более похожа на криволинейную фигуру $\Gamma_f = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y, 0 \le y \le f(x)\}$ — множество точек между осью абсцисс и графиком функции f. Тем самым, неформально говоря, $\int_0^1 f(x)\,dx$ для таких функций f — площадь фигуры Γ_f.

Пусть, например, $f(x) = x$. Тогда $I(f,X) = \sum_{i=0}^{N-1} x_{2i+1}(x_{2i+2} - x_{2i})$. Для вычисления предела сделаем такой трюк:

$$I(f,X) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{2i+1} - \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2})(x_{2i+2} - x_{2i}) + \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2}(x_{2i+2} - x_{2i}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(x_{2i+2}^2 - x_{2i}^2) + \sum_{i=0}^{N-1}(x_{2i+1} - \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2})(x_{2i+2} - x_{2i})$$

Первое слагаемое равно $\frac{1}{2}(x_{2N} - x_0) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$. Пусть теперь $X \in U_\varepsilon$; тогда для всякого i имеем $\left|x_{2i+1} - \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2}\right| < \varepsilon$ (докажите!). Обозначим L второе слагаемое в сумме. Для любого количества слагаемых модуль их суммы не превосходит суммы их модулей, откуда вытекает, что

$$|L| \le \sum_{i=0}^{N-1}\left|x_{2i+1} - \frac{x_{2i+2}+x_{2i}}{2}\right|(x_{2i+2} - x_{2i}) \le \varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}(x_{2i+2} - x_{2i}) = \varepsilon(x_{2N} - x_0) = \varepsilon.$$

Следовательно, если $X \in U_\varepsilon(\infty)$, то $-\varepsilon < L < \varepsilon$, откуда $I(f,X) \in (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$. По определению получается, что $\int_0^1 x\,dx = \lim_{X\to\infty} I(f,X) = \frac{1}{2}$.