ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Единственность предела. Обобщение понятия окрестности: бесконечности и $\mathbb{R}^n$.

1. Единственность предела Пусть $A \subset \mathbb{R}$ (т.е. A — какое-то множество, состоящее из действительных чисел). Напомним, что точка $a \in A$ называется изолированной, если существует ее окрестность $U_\varepsilon(a)$ такая, что пересечение множеств $U_\varepsilon(a) \cap A$ содержит единственный элемент — саму точку a. Иными словами, точка $a \in A$ *не является* изолированной тогда и только тогда, когда для любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(a)$ пересечение $\overset{\circ}{V}(a) \cap A \neq \varnothing$ — иными словами, найдется $b \in V \cap A$ такое, что $b \neq a$.

Предложение 1. *Пусть $f : A \to B$ — отображение, и точка $a \in A$ не является изолированной. Тогда если предел $\lim_{x\to a} f(x)$ существует, то он единственный.*

Доказательство. Пусть это не так, и существуют два предела, $u_1 \neq u_2$. Это означает, что функции $g_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ u_1, & x = a \end{cases}$ и $g_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ u_2, & x = a \end{cases}$ обе непрерывны. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ такое, чтобы окрестность $U_1 = (u_1 - \varepsilon, u_1 + \varepsilon)$ точки u_1 и окрестность $U_2 = (u_2 - \varepsilon, u_2 + \varepsilon)$ точки u_2 не пересекались, и пусть $V_1 = (a - \delta_1, a + \delta_1)$, $V_2 = (a - \delta_2, a + \delta_2)$ — окрестности точки a, о которых идет речь в определении непрерывности функций g_1 и g_2 соответственно. Без ограничения общности $\delta_1 < \delta_2$, так что $V_1 \subset V_2$. Поскольку точка a не изолированная, существует число $b \in V_1 \cap A$ такое, что $b \neq a$. Тогда $g_1(b) \in U_1$ и $g_2(b) \in U_2$. Но $g_1(b) = f(b) = g_2(b)$ (поскольку $b \neq a$ — во всех точках, кроме a функции g_1 и g_2 совпадают с функцией f и друг с другом), и таким образом $f(b) \in U_1 \cap U_2$, что противоречит тому, что эти окрестности не пересекаются. □

Следствие 1 (предложения 1). *Пусть точка $a \in A$ не является изолированной. Тогда отображение $f : A \to B$ непрерывно в точке a тогда и только тогда, когда $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.*

Предложение 2 ("лемма о двух полицейских"). *Если $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ — три функции, причем $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = u$ и $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ при x, принадлежащем некоторой окрестности точки a, то $\lim_{x\to a} g(x) = u$.*

Доказательство. Пусть $U = (u-\varepsilon, u+\varepsilon)$ — окрестность точки u. Согласно определению предела, существует окрестность $V_1 = (a-\delta_1, a+\delta_1)$ точки a такая, что если $x \in V_1$ (то есть $|x - a| < \delta_1$), то $f(x) \in U$. Аналогично, существует окрестность $V_2 = (a-\delta_2, a+\delta_2)$ точки a такая, что если $x \in V_2$ (то есть $|x - a| < \delta_2$), то $h(x) \in U$. Выберем меньшее из чисел δ_1, δ_2 — пусть это δ_1. Тогда $V_1 \subset V_2$, то есть если $x \in V_1$, то x принадлежит обеим окрестностям и, следовательно, $f(x), h(x) \in U$. Последнее включение означает, что $u-\varepsilon < f(x) < h(x) < u+\varepsilon$, а поскольку $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ — также и $u - \varepsilon < g(x) < u + \varepsilon$, то есть $g(x) \in U$. Тем самым найдена окрестность точки a (это V_1) такая, что если x ей принадлежит, то $g(x) \in U$. (Если $\delta_2 \leq \delta_1$, то такой окрестнотью будет, наоборот, V_2.)

Это и означает, что $\lim_{x\to a} g(x) = u$. □

Пример 1. Пусть $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $f(x) = \sin 1/x$ при $x \neq 0$. Тогда предел $\lim_{x\to 0} f(x)$ не существует. Действительно, произвольная проколотая окрестность $\overset{\circ}{V} = (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ точки 0 содержит как точку вида $p = 1/(2\pi n + \pi/2)$, так и точку вида $q = 1/(2\pi n - \pi/2)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, для этого нужно только, чтобы $1/(2\pi n - \pi/2) < \delta$, то есть $n > (1/\delta + \pi/2)/(2\pi)$, а целое число с таким свойством всегда существует. Но тогда $f(p) = 1$ и $f(q) = -1$; дальнейшее рассуждение такое же, как в лекции 1.

2. Обобщение понятия окрестности: бесконечности Рассмотрим множество $\overline{\mathbb{R}}$, состоящее из всех действительных чисел и еще двух элементов, обозначаемых $+\infty$ и $-\infty$. Окрестностями действительных чисел в $\overline{\mathbb{R}}$ мы будем называть то же, что и раньше, а окрестностями $+\infty$ и $-\infty$ будут называться множества $U_c(+\infty) = (c, +\infty] = \{+\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > c\}$ и $U_c(-\infty) = [-\infty, c) = \{-\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}$. После того, как определены окрестности, определения непрерывного в точке a отображения и определение предела получают смысл для отображений $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, где $A \subset \overline{\mathbb{R}}$,

Пример 2. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — последовательность, заданная формулой $f(n) = 1/n$; покажем, что $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$.

Пусть $V_\varepsilon = (-\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ — окрестность точки 0. Рассмотрим проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}_{1/\varepsilon} = (1/\varepsilon, +\infty) \subset \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ точки $+\infty$. Пусть $n \in U_{1/\varepsilon} \cap A$, то есть n — натуральное число, для которого $n > 1/\varepsilon$. Тогда $0 \le f(n) = 1/n < \varepsilon$, так что $f(n) \in V_\varepsilon$, так что утверждение о пределе доказано.

Задача. Определим отображение $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ формулой $f(x) = 1/x^2$ при $x \neq 0$. Докажите, что $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Рассмотрим теперь множество $\widetilde{\mathbb{R}}$, состоящее из всех действительных чисел и еще одного элемента, ∞ ("бесконечность без знака"). Окрестности действительных чисел — те же, что в $\mathbb{R}$ и в $\overline{\mathbb{R}}$ (интервалы с центром в соответствующей точке); окрестностями же элемента ∞ будем называть множества $U_c = \{\infty\} \cup (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$ для всех $c > 0$. Теперь у нас определено понятие непрерывности (и предела) для отображений $f : A \to B$, где A — либо подмножество $\overline{\mathbb{R}}$, либо подмножество $\widetilde{\mathbb{R}}$ (в частности, возможно $A \subset \mathbb{R}$, поскольку $\mathbb{R}$ — подмножество и $\overline{\mathbb{R}}$, и $\widetilde{\mathbb{R}}$ одновременно).

Пример 3. Пусть $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ — функция, определенная формулой $f(x) = 1/x$ (на самом деле все значения f — действительные числа, но $\mathbb{R} \subset \widetilde{\mathbb{R}}$, так что f можно рассматривать как отображение со значениями в $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Докажем, что $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$. Действительно, пусть U_c — произвольная окрестность точки ∞. Возьмем проколотую окрестность $V = (-\delta, 0) \cup (0, \delta) \subset \mathbb{R}$, где $\delta > 0$ — произвольное число, для которого $\delta < 1/c$ (при $c > 0$ такое обязательно существует — например, $\delta = 1/(2c)$). Если теперь $x \in V \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, то либо $x > 0$ — тогда $f(x) > c$, либо $x < 0$ — тогда $f(x) < -c$. В обоих случаях $f(x) \in U_c$.

Рассмотрим теперь ту же f как отображение $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ и покажем, что в этом случае $\lim_{x \to 0} f(x)$ не существует. Сначала докажем, что $\lim_{x \to 0} f(x) \neq +\infty$. Для этого возьмем окрестность $U_c(+\infty) = (c, +\infty]$ точки $+\infty$ для произвольного $c > 0$, и пусть $\overset{\circ}{V} = (-\delta, 0) \cup (0, +\delta) \subset \mathbb{R}$ — проколотая окрестность точки 0. Эта проколотая окрестность обязательно содержит число $x < 0$ (например, $x = -\delta/2$), для которого $f(x) < 0$ и, следовательно, $f(x) \notin U_c(+\infty)$. Аналогично доказывается, что предел не может быть равен $-\infty$.

Пусть теперь $\lim_{x \to 0} f(x) = c \in \mathbb{R}$ и $U = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ — окрестность точки c. Произвольная проколотая окрестность $V = (-\delta, 0) \cup (0, +\delta)$ точки 0 содержит точку $x \in V \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ такую, что $x < 1/(c + \varepsilon)$. Тогда $f(x) > c + \varepsilon$, так что $f(x) \notin U$. Следовательно, c пределом не является, так что предела не существует.

3. Обобщение понятия окрестности: плоскость Координатная плоскость $\mathbb{R}^2$ — множество, элементами которой являются упорядоченные пары (x, y) действительных чисел. Отображения $f : A \to \mathbb{R}$, где $A \subset \mathbb{R}^2$, называют функциями двух действительных переменных: на самом деле, это отображение сопоставляет число $f((x, y)) \in \mathbb{R}$ точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ координатной плоскости — то есть, двум действительным числам x и y; для удобства убирают одну пару скобок и пишут $f(x, y)$.

Отображение $g : A \to \mathbb{R}^2$, где $A \subset \mathbb{R}$, сопоставляет каждому действительному числу $t \in A$ точку $g(t) \in \mathbb{R}^2$ координатной плоскости. Такое отображение называется вектор-функцией (двумерной) одной действительной переменной или (параметризованной) кривой на плоскости. Точка $g(t)$ имеет координаты, зависящие от t: $g(t) = (x(t), y(t))$; тем самым x и y являются отображениями $A \to \mathbb{R}$, то есть обычными функциями одной переменной. Тем самым, вектор-функция это просто пара обыкновенных функций.

Назовем окрестностью точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ множество $U_{t,s}(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in U_t(a), y \in U_s(b)\}$, то есть $U_{t,s}(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a - t < x < a + t, b - s < y < b + s\}$. Геометрически $U_{t,s}(a, b)$ — прямоугольник (без сторон, только внутренность) со сторонами, параллельными осям координат. Понятие окрестности позволяет определить непрерывность отображений $f : A \to B$, где $B = \mathbb{R}^2$ или одно из множеств, рассмотренных ранее ($\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\widetilde{\mathbb{R}}$), а A — подмножество $\mathbb{R}^2$ (или, опять-таки, подмножество $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ или $\widetilde{\mathbb{R}}$) — иными словами, непрерывность функций двух переменных, а также вектор-функций одной или двух переменных.

Пример 4. Рассмотрим функцию двух переменных $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданную формулой $\alpha(x, y) = x + y$. Докажем, что она непрерывна в произвольной точке $a = (p, q)$. Для этого рассмотрим произвольную окрестность $U = (p + q - \varepsilon, p + q + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ точки $\alpha(p, q) = p + q$, и пусть $V = (p - \varepsilon/2, p + \varepsilon/2) \times (q - \varepsilon/2, q + \varepsilon/2) \subset \mathbb{R}^2$ — окрестность точки $a = (p, q) \in \mathbb{R}^2$. Если $z = (x, y) \in V$, то $p - \varepsilon/2 < x < p + \varepsilon/2$ и $q - \varepsilon/2 < y < q + \varepsilon/2$, откуда вытекает, что $p + q - \varepsilon < x + y = \alpha(z) < p + q + \varepsilon$, то есть $\alpha(z) \in U$. Это доказывает непрерывность.

Пример 5 (аналогичный примеру 4). Докажем непрерывность функции двух переменных $\mu(x, y) = xy$ в произвольной точке $a = (p, q)$. Предположим, что $p, q > 0$, остальные случаи — упражнение. Как и раньше, рассмотрим произвольную окрестность $U = (pq - \varepsilon . pq + \varepsilon)$, и пусть $V = (p - \delta_1, p + \delta_1) \times (q - \delta_2, q + \delta_2)$, где δ_1 — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \varepsilon/(4q)$, $\delta_1 < 1$ и $\delta_1 < \varepsilon/2$, а δ_2 — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \varepsilon/(4p)$, $\delta_2 < 1$ и $\delta_2 < \varepsilon/2$. Тогда для всякого $z = (x, y) \in V$ получим $\mu(z) = xy < (p + \delta_1)(q + \delta_2) = pq + q\delta_1 + p\delta_2 + \delta_1\delta_2 < pq + q \cdot \varepsilon/(4q) + p \cdot \varepsilon/(4p) + \delta_1 < pq + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = pq + \varepsilon$ и $f(z) = xy > (p - \delta_1)(q - \delta_2) = pq - q\delta_1 - p\delta_2 + \delta_1\delta_2 > pq - q\delta_1 - p\delta_2 > pq - q \cdot \varepsilon/(4a) - p \cdot \varepsilon/(4p) = pq - \varepsilon/2 > pq - \varepsilon$, так что $\mu(z) \in U$. Тем самым непрерывность доказана.

Понятие окрестности очевидным образом переносится (уточните, как именно!) на множество (n-мерное вещественное пространство) $\mathbb{R}^n$ с произвольным $n \ge 1$, элементами которого являются упорядоченные наборы $(x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел.