9. НАКРЫТИЯ.

Задача 1. Докажите, что следующие отображения $p : E \to B$ — накрытия, и опишите соответстветствующие гомоморфизмы $p_* : \pi_1(E) \to \pi_1(B)$ фундаментальных групп: а) $E = B \stackrel{\text{def}}{=} S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, а $p(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^n$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. б) $E = B = \mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а p задано той же формулой, что и в пункте 1а. в) $E = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{C}^*$, $p(z) = \exp z$. г) Покажите, что отображение $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданное формулой пункта 1а, накрытием при $n \neq \pm 1$ не является.

Указание (к пункту 1в)**.** $\exp(a + bi) = e^a(\cos b + i \sin b)$, так что $|\exp(a + bi)| = e^a$, а $\arg \exp(a + bi) = b$.

Задача 2. а) Докажите, что не существует непрерывного отображения $\sqrt{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющего при всех $z \in \mathbb{C}$ равенству $\left(\sqrt{z}\right)^2 = z$. б) Докажите, что не существует непрерывного отображения $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, удовлетворяющего при всех $z \in \mathbb{C}^*$ равенству $\exp(\log z) = z$.

Пусть $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат, $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ — двулистное накрытие проективной плоскости сферой (где точке $a \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ сопоставляется прямая $p(a) \subset \mathbb{R}^3$, проходящая через a и начало координат). Пусть $B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in S^2 \mid -1/2 \leq z \leq 1/2\} \subset S^2$ (“тропики”), $M \stackrel{\text{def}}{=} p(B) \subset \mathbb{R}P^2$.

Задача 3. а) Докажите, что M гомеоморфно ленте Мебиуса. б) Докажите, что B и M гомотопически эквивалентны окружности. в) Найдите группы $\pi_1(B)$ и $\pi_1(M)$ и гомоморфизм $p_* : \pi_1(B) \to \pi_1(M)$. г) Найдите гомоморфизм $\iota_* : \pi_1(M) \to \pi_1(\mathbb{R}P^2)$, где $\iota : M \to \mathbb{R}P^2$ — тавтологическое вложение: если $a \in M$, то $\iota(a)$ — та же точка a, но уже как элемент $\mathbb{R}P^2$.

Свободной группой с k образующими $a_1, \dots, a_k$ называется множество конечных последовательностей (“слов”), состоящих из символов $a_1, a_1^{-1}, \dots, a_k, a_k^{-1}$, профакторизованное по следующему отношению эквивалентности: слово u эквивалентно слову v, если одно из другого можно получить, вписывая в произвольные места пары символов $a_i a_i^{-1}$ и $a_i^{-1} a_i$ (для всех $i = 1, \dots, k$) и вычеркивая такие пары. На множестве классов эквивалентности задается умножение: если p и q — два класса, а $u_1 \dots u_s$ и $v_1 \dots v_t$ — представляющие их слова, то pq — класс, содержащий слово $u_1 \dots u_s v_1 \dots v_t$.

Упражнение (для тех, кто раньше не имел дела со свободной группой)**.** а) Докажите, что введенное отношение — действительно отношение эквивалентности. б) Докажите, что определение умножения корректно: класс pq не зависит от выбора слов — представителей классов p и q. в) Докажите, что свободная группа действительно является группой. г) Докажите, что свободная группа с одной образующей изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению. д) Докажите, что свободная группа с $k \geq 2$ образующими некоммутативна: $a_1 a_2 \neq a_2 a_1$.

Напомним, что графом называется топологическое пространство, полученное из дизъюнктного объединения отрезков (ребер) склеиванием их концов.

Задача 4. а) Пусть Γ_a — граф, изображенный на рис. 1а. Докажите, что граф Γ_a односвязен ($\pi_1(\Gamma_a)$ тривиальна). б) Постройте накрытие $p : \Gamma_a \to W_2$ над букетом W_2 из двух окружностей. Что представляет собой слой этого накрытия? в) Докажите, используя это накрытие, что $\pi_1(W_2)$ — свободная группа $\mathcal{F}(a, b)$ с 2 образующими a и b; укажите эти образующие явно. г) Постройте накрытия $p_b : \Gamma_b \to W_2$ и $p_c : \Gamma_c \to W_2$,

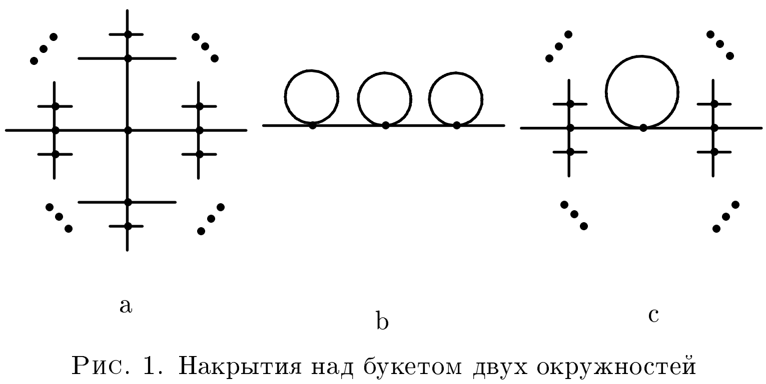

Рис. 1. Накрытия над букетом двух окружностей

где Γ_b и Γ_c — графы, изображенные на рис. 1b и 1c соответственно. Опишите явно подгруппы $(p_b)_*(\pi_1(\Gamma_b))$ и $(p_c)_*(\pi_1(\Gamma_c))$ в группе $\mathcal{F}(a,b) = \pi_1(W_2)$. Нормальны ли они?

Указание (к пункту 4а)**.** Пусть $\gamma : [0,1] \to \Gamma_a$ — петля, т.е. непрерывное отбражение, для которого $\gamma(0) = \gamma(1)$. Образ $\gamma([0,1]) \subset \Gamma_a$ компактен (почему?); выведите отсюда, что он лежит в объединении конечного числа ребер, т.е. в конечном подграфе $T \subset \Gamma_a$. Затем докажите, что в качестве подграфа T можно выбрать дерево (конечное) — линейно связный граф без циклов. Согласно задаче 2 семинара 8, дерево стягиваемо (гомотопически эквивалентно точке).

Задача 5. а) Опишите все связные двулистные накрытия над букетом W_2 из двух окружностей. Какие из них являются нормальными? б) Для каждого из построенных накрытий $p : E \to W_2$ опишите соответствующий гомоморфизм фундаментальных групп $p_* : \pi_1(E) \to \pi_1(W_2) = \mathcal{F}(a,b)$ ($\mathcal{F}(a,b)$ — свободная группа с двумя образующими a и b, см. задачу 4в), а также его образ — подгруппу $p_*(E) \subset \mathcal{F}(a,b)$. Убедитесь, что индекс подгруппы равен 2. в) Пусть $p : E \to W_n$ — m-листное (m конечно) связное накрытие над букетом из n окружностей. Докажите, что E гомеоморфно конечному графу, вычислите количество его вершин и ребер. г) Докажите, что связный конечный граф с m вершинами и k ребрами гомотопически эквивалентен букету W_p из p окружностей, где p однозначно определяется m и k; вычислите p явно. д) Докажите, что подгруппа индекса m в свободной группе с n образующими изоморфна свободной группе с q образующими, где число q однозначно определяется m и n. Вычислите число q явно.