8. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Задача 1. а) Докажите, что плоскость и полуплоскость гомотопически эквивалентны. б) Докажите, что плоскость без точки и полуплоскость без внутренней точки гомотопически эквивалентны окружности. в) Докажите, что полуплоскость без граничной точки стягиваема (гомотопчески эквивалентна точке). г) Докажите, что плоскость и полуплоскость не гомеоморфны. д) Докажите, что при гомеоморфизме полуплоскости в себя граничные точки переходят в граничные, а внутренние — во внутренние.

Конечным графом называется топологическое пространство, полученное из конечного дизъюнктного объединения отрезков склеиванием их концов. Образы отрезков при отображении склейки называются ребрами графа, а образы их концов — вершинами. Если два конца ребра совпадают (концы соответствующего отрезка склеены), то ребро называется петлей.

Задача 2. а) Докажите, что конечный граф компактен и связный конечный граф линейно связен. б) Пусть G — конечный граф, а e — его ребро, не являющееся петлей. Обозначим G/e пространство, полученное стягиванием ребра e (все его точки отождествляются). Докажите, что G/e гомеоморфно конечному графу, и опишите этот граф. в) Докажите, что G/e гомотопически эквивалентно G. г) Докажите, что линейно связный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей. Сколько окружностей в букете, если в графе n вершин и m ребер?

Задача 3. Пусть V_n — букет n окружностей, $p_k : S^1 \to V_n$ — отображение, гомеоморфно переводящее S^1 в k-ю окружность букета ($1 \le k \le n$), а $q_\ell : V_n \to S^1$ — отображение, гомеоморфно переводящее ℓ-ю окружность букета в $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, причем вершина букета переходит в точку $(1, 0) \in S^1$, и все точки всех остальных окружностей букета тоже переходят в $(1, 0)$ (здесь тоже $1 \le \ell \le n$). а) Вычислите степень отображения $q_\ell \circ p_k : S^1 \to S^1$ для всех k и ℓ; докажите, что отображения p_k и q_ℓ не гомотопны отображениям в точку. б) Убедитесь, что если $n > 1$, то для всякого k найдется ℓ такое, что $q_\ell \circ p_k$ гомотопно отображению в точку, а если $n = 1$, то это не так. Выведите отсюда, что букет V_n при $n > 1$ гомотопически не эквивалентен окружности. в) Докажите, что букеты V_{n_1} и V_{n_2} при $n_1 \ne n_2$ гомотопически не эквивалентны.

Сферой с g ручками называется топологическое пространство, полученное из правильного $4g$-угольника $a_1a_2 \dots a_{4g}$ попарным отождествлением его противоположных сторон, причем точка $x \in [a_i, a_{i+1}]$, лежащая на расстоянии t от вершины a_i, склеивается с точкой $y \in [a_{i+2g}, a_{i+1+2g}]$, лежащей на расстоянии t от вершины a_{i+1+2g} (для всех t и всех i; сложение в индексах по модулю $4g$).

Задача 4. а) Докажите, что каждая точка сферы с g ручками обладает окрестностью, гомеоморфной открытому кругу. б) Докажите, что если M_g — сфера с g ручками и $x \in M_g$, то $M_g \setminus \{x\}$ гомотопически эквивалентна букету $2g$ окружностей. Выведите отсюда, что M_{g_1} и M_{g_2} при $g_1 \ne g_2$ не гомеоморфны друг другу. в) Докажите, что сфера с 1 ручкой (тор) гомеоморфна $S^1 \times S^1$. Вычислите ее фундаментальную группу и укажите на ней петли, классы гомотопии которых являются образующими этой группы. г) Докажите, что пространство, полученное из правильного шестиугольника попарным склеиванием его противоположных сторон по тому же правилу, что в сфере с ручками, гомеоморфно тору. д) Докажите, что сфера с g ручками гомеоморфна пространству, полученному склеиванием сферы с $(g - 1)$ ручками и круглой дыркой и тора с дыркой (собственно, “ручки”) по границам дырок.