7. ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТЬ

Символом S^1 мы будем обозначать множество $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Напомним, что для любого непрерывного отображения $f : [0, 1] \to S^1$ существует *поднятие* — непрерывное отображение $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такое, что $p \circ F = f$; здесь $p : \mathbb{R} \to S^1$ — отображение, заданное формулой $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Если $F_1, F_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — два поднятия одного и того же отображения f, то $F_1(t) - F_2(t) = k = const.$, где $k \in \mathbb{Z}$. Величина $F(1) - F(0) \in \mathbb{R}$ тем самым не зависит от поднятия; она называется вращением отображения $f : [0, 1] \to S^1$.

Задача 1. 1) Докажите, что вращение отображения может быть любым действительным числом. 2) При каких $x \in \mathbb{R}$ существует отображение $f : [0, 1] \to S^1$, вращение которого равно x, а образ $f([0, 1])$ не совпадает со всем S^1?

Пусть $p_0 : [0, 1] \to S^1$ — отображение, заданное формулой $p_0(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, а $g : S^1 \to S^1$ — произвольное непрерывное отображение. Вращение отображения $g \circ p_0 : [0, 1] \to S^1$ называется степенью отображения g и обозначается $\deg g$.

Задача 2. 1) Докажите, что $\deg g \in \mathbb{Z}$. 2) Докажите, что непрерывное отображение $f : [0, 1] \to S^1$ представимо в виде $g \circ p_0$ с непрерывным $g : S^1 \to S^1$ тогда и только тогда, когда вращение f — целое число. 3) Докажите, что если $f = g \circ p_0$, где $g : S^1 \to S^1$ непрерывно, то g определено однозначно.

Пусть $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение (плоское векторное поле), а $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение (плоская кривая) такая, что $P(\gamma(a)) \neq 0$ для всех $a \in S^1$. Вращением векторного поля P на кривой γ называется степень отображения $S^1 \to S^1$, заданного формулой $a \mapsto P(\gamma(a))/|P(\gamma(a))|$.

Задача 3. Отождествим $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Найдите вращение векторного поля $P(z) = z(z - 1)(z^2 + 1)$ на кривых $\gamma(a) = z_0 + ra$ (то есть на окружностях радиуса r с центром в z_0), где 1) $z_0 = 0$, $r = 1/2$, 2) $z_0 = 1$, $r = 1/2$, 3) $z_0 = 1/2$, $r = 1$, 4) $z_0 = 0$, $r = 2$.

Задача 4. 1) Докажите, что если $\deg g_1 = \deg g_2$, то отображения g_1 и g_2 гомотопны. 2) Выведите обратное из теоремы о поднятии отображений $Y \to S^1$ до отображений $Y \to \mathbb{R}$ (где Y — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$).

Указание (к пункту 1)**.** Сначала разберите случай, когда $g_1(1, 0) = g_2(1, 0)$; покажите, что в этом случае можно считать, что $G_1(0) = G_2(0)$, где $G_1, G_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — поднятия отображений $g_1 \circ p_0$ и $g_2 \circ p_0$ соответственно. Потом сведите общий случай к этому.

Задача 5. 1) Докажите, что если $\deg g \neq 0$, то образ отображения $g : S^1 \to S^1$ — вся окружность S^1. (Сравните с задачей 2.) Приведите пример, когда обратное неверно. 2) Докажите, что если $\deg g_1 \neq \deg g_2$, то существует $a \in S^1$ такая, что $g_1(a) = g_2(a)$.

Основная теорема алгебры утверждает, что всякий комплексный многочлен $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ $(n > 0)$ имеет комплексный корень. Докажем ее от противного. Пусть $R \geq 0$ и $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x + iy \mid |x + iy| = 1\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; определим отображение $f_{P,R} : S^1 \to S^1$ формулой $f_{P,R}(x,y) = P(R(x+iy))/\left|P(R(x+iy))\right|$. Если основная теорема алгебры неверна для многочлена P, то $f_{P,R}$ определено для любого $R \geq 0$.

Задача 6 (основная теорема алгебры)**.** 1) Выпишите явно отображение $f_{P_0,R} : S^1 \to S^1$, где $P_0(z) = z^n$ и найдите его степень. 2) Докажите, что если $a_0 \neq 0$, то $\deg f_{P,0} = 0$. 3) Докажите, что если R достаточно велико, то отображение $f_{P,R}$ гомотопно отображению $f_{P_0,R}$, рассмотренному в пункте 1. 4) Сравните результаты задач 3, 2 и 1 и докажите основную теорему алгебры.

Пусть $u, v : [0,1] \to [0,1]^2$ — два непрерывных отображения (непрерывные кривые в квадрате), причем $u(0) = (0,0)$, $u(1) = (1,1)$, $v(0) = (0,1)$, $v(1) = (1,0)$. Докажем, что кривые u и v пересекаются — существуют $t, s \in [0,1]$ такие, что $u(t) = v(s)$. Предположим, что это не так; тогда можно определить отображение $F : [0,1]^2 \to S^1$ формулой $F(t,s) = (u(t) - v(s))/\left|u(t) - v(s)\right|$. Пусть $\mu_R : S^1 \to [0,1]^2$ — непрерывное отображение, взаимно однозначно переводящее окружность в квадрат со стороной R, центром в центре квадрата $[0,1]^2$ и сторонами, параллельными осям координат; здесь $0 < R \leq 1$. Рассмотрим отображение $f_R = F \circ \mu_R : S^1 \to S^1$.

Задача 7. 1) Докажите, что $\deg f_0 = 0$. 2) Докажите, что f_1 гомотопно тождественному отображению $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$. 3) Приведите результаты задач 1 и 2 к противоречию, доказав тем самым, что кривые u и v пересекаются. 4) Из города A в город B ведут две дороги. Две повозки, связанные веревкой длиной 10 м, смогли проехать из A в B, одна по первой дороге, другая по второй. Докажите, что два круглых воза диаметром 10 м, одновременно выехавшие из A и из B навстречу друг другу по двум разным дорогам, разъехаться не смогут.

Функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется гладкой, если она имеет непрерывную производную любого (сколь угодно высокого!) порядка. Число $c \in \mathbb{R}$ называется регулярным значением гладкой функции F, если из того, что $F(x) = c$ вытекает, что $F'(x) \neq 0$.

Задача 8. Пусть $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, для которой $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. Пусть $c \in \mathbb{R}$ — регулярное значение F. 1) Докажите, что каждая точка множества $F^{-1}(c) \overset{\text{def}}{=} \{x \in [0,1] \mid F(x) = c\}$ изолирована, а само множество конечно. 2) Докажите, что число $\deg_c F \overset{\text{def}}{=} \#\{x \in [0,1] \mid F(x) = c, F'(x) > 0\} - \#\{x \in [0,1] \mid F(x) = c, F'(x) < 0\}$ равно 1, если $0 < c < 1$, и равно 0 при $c < 0$ или $c > 1$.

Указание. На самом деле, чтобы утверждения задачи 8 были верны, достаточно, чтобы F имела непрерывную первую производную.

Непрерывное отображение $g : S^1 \to S^1$ называется гладким, если поднятие $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ отображения $g \circ p_0$ гладкое, причем $G'(0) = G'(1)$. Точка $c \in S^1$ называется регулярным значением отображения g, если $G'(t) \neq 0$ для всякого $t \in [0,1]$ такого, что $p(G(t)) = c$ (как и выше, $p : \mathbb{R} \to S^1$ — стандартная проекция, $p_0 : [0,1] \to S^1$ — ее ограничение на отрезок $[0,1]$).

Задача 9. 1) Докажите, что гладкость g и тот факт, что c — регулярное значение, не зависит от выбора поднятия G. 2) Докажите, что каждая точка множества $\{t \in [0,1] \mid p(G(t)) = c\}$ изолирована, а само множество конечно. 3) Докажите, что число $\deg_c g \overset{\text{def}}{=} \#\{t \in [0,1) \mid p(G(t)) = c, G'(t) > 0\} - \#\{t \in [0,1) \mid p(G(t)) = c, G'(t) < 0\}$ равно $\deg g$ (в частности, не зависит от выбора поднятия G и регулярного значения c).