6.1. Пусть c_{00} — пространство финитных числовых последовательностей $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), снабженное нормой $\|x\|_1 = \sum_n |x_n|$, или $\|x\|_2 = (\sum_n |x_n|^2)^{1/2}$, или $\|x\|_\infty = \max_n |x_n|$.
(a) Докажите, что ни в одной из этих трех норм c_{00} не является полным, предъявив конкретный пример фундаментальной, но не сходящейся последовательности.
(b) Есть ли на c_{00} хоть какая-нибудь норма, в которой оно полно? (*Указание*: теорема Бэра.)

6.2*. Докажите полноту пространств ℓ^1 и ℓ^2.

Указание: если $(x^{(n)})$ — фундаментальная последовательность в ℓ^1, где $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$, то в силу полноты $\mathbb{R}$ она сходится покоординатно (т.е. для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел $y_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$). Затем еще раз выпишите условие фундаментальности последовательности $(x^{(n)})$ и с его помощью покажите, что последовательность $y = (y_k)$ лежит в ℓ^1, и что $x^{(n)} \to y$ по ℓ^1-норме. Для ℓ^2 рассуждения аналогичны.

6.3. Пусть X — метрическое пространство. Предположим, что каждая последовательность (B_n) замкнутых шаров в X, такая, что $B_n \supset B_{n+1}$ для всех n и $\operatorname{diam} B_n \to 0$, имеет непустое пересечение. Докажите, что X полно.

6.4. (a) Приведите пример метрики на $\mathbb{N}$, в которой $\mathbb{N}$ полно, но некоторая убывающая последовательность замкнутых шаров в $\mathbb{N}$ (по этой метрике) имеет пустое пересечение.
(b) Покажите, что в полном нормированном пространстве всякая убывающая последовательность замкнутых шаров имеет непустое пересечение.

6.5. Постройте отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, но не имеющее неподвижной точки.

6.6. Пусть X — компактное метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — отображение, удовлетворяющее условию $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$, $x \neq y$. Докажите, что f имеет единственную неподвижную точку.

6.7. Докажите, что уравнение $x = x^3 + 0.001$ имеет корень вблизи нуля, и найдите его первые 10 десятичных знаков.

6.8. Докажите, что среди решений системы от бесконечного числа переменных

$$x_n = \frac{1}{5}(x_{n-1} + x_{n+1}) + \frac{1}{1+n^2} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

существует и единственно ограниченное.

6.9. Опишите пополнение пространства c_{00} по нормам $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ (см. задачу 6.1).

6.10*. Пусть X — метрическое пространство и $\mathfrak{M}(X)$ — множество всех его замкнутых ограниченных подмножеств, снабженное метрикой Хаусдорфа (см. 1-й список задач). Докажите, что
(a) если X вполне ограничено, то и $\mathfrak{M}(X)$ вполне ограничено;
(b) если X полно, то и $\mathfrak{M}(X)$ полно.

Как следствие, если X компактно, то и $\mathfrak{M}(X)$ компактно.

Указания. **(a)** Если S — ε-сеть в X, то 2^S — ε-сеть в $\mathfrak{M}(X)$.
(b) Докажите, что если (A_n) — фундаментальная последовательность в $\mathfrak{M}(X)$, то она сходится к множеству A, состоящему из таких $a \in X$, что для любой окрестности $U \ni a$ выполнено $U \cap A_n \neq \varnothing$ для бесконечно многих n. Чтобы доказать неравенство $\sup_{b\in X_n} \rho(b, A) < \varepsilon$ для достаточно больших n, удобно зафиксировать b и выбрать последовательность $n_1 = n < n_2 < n_3 < \ldots$ так, чтобы $\rho_H(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \varepsilon/2^k$, а затем выбрать $x_k \in A_{n_k}$ так, чтобы $x_k \to a \in A$.

6.11. Пусть X — подмножество в произведении $\{0,1\}^S$ несчетного семейства двоеточий $\{0,1\}$, состоящее из всех тех элементов, у которых не более чем счетное число координат отличны от нуля. Докажите, что X секвенциально компактно, но не компактно.

6.12. Пусть X — произведение континуального семейства двоеточий. Заметим, что X компактно в силу теоремы Тихонова. Покажите, что X не является секвенциально компактным. (*Указание:* континуум — это множество всех последовательностей из нулей и единиц.)