4.1. Обозначим через $M_n(\mathbb{R})$ пространство всех матриц размера $n \times n$ над $\mathbb{R}$ и снабдим его стандартной топологией конечномерного векторного пространства, порожденной какой-либо[1] нормой. Компактны ли следующие подмножества $M_n(\mathbb{R})$?
(a) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;
(b) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$;
(c) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : A^\top = A^{-1}\}$ (ортогональные матрицы);
(d) $\{P \in M_n(\mathbb{R}) : P^2 = P\}$ (проекторы).

4.2. Пусть X — подмножество $\mathbb{R}^n$. Предположим, что каждая непрерывная функция из X в $\mathbb{R}$ ограничена. Докажите, что X компактно.

На самом деле утверждение из предыдущей задачи верно для любого метрического (но не любого топологического) пространства X. Позже мы к этому еще вернемся…

4.3. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся подмножества метрического пространства X, причем одно из них компактно. **(a)** Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(a,b) > \varepsilon$ для всех $a \in A$, $b \in B$. **(b)** Сохраняет ли силу п. (a) без предположения о компактности?

4.4. Докажите, что замкнутый шар в пространствах **(a)** ℓ^1; **(b)** ℓ^2; **(c)** ℓ^∞; **(d)** $C[a,b]$ некомпактен. Являются ли перечисленные пространства локально компактными?

Указание: в каждом из этих шаров есть бесконечное подмножество, попарные расстояния между элементами которого больше некоторой положительной константы.

На самом деле ни в каком бесконечномерном нормированном пространстве шар не является компактным множеством. Мы этого доказывать не будем.

4.5. Пусть X и Y — топологические пространства, $p\colon X \times Y \to X$ — проекция (т.е. $p(x,y) = x$ для всех $(x,y) \in X \times Y$).
(a) Докажите, что p открыто.
(b) Докажите, что если Y компактно, то p замкнуто.
(c) Сохраняет ли силу п. (b) для некомпактного Y?

4.6. Докажите, что произведение $\prod_{i\in I} X_i$ семейства топологических пространств $(X_i)_{i\in I}$ локально компактно тогда и только тогда, когда все X_i локально компактны и лишь конечное их число некомпактно.

В следующих задачах для топологического пространства X через X_+ обозначена его одноточечная компактификация.

4.7. Постройте гомеоморфизмы между **(a)** $\mathbb{N}_+$ и некоторым подмножеством отрезка $[0,1]$; **(b)** $(\mathbb{R}^2)_+$ и S^2; **(c)** $(\mathbb{R}^n)_+$ и S^n.

4.8. Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Доопределим f до отображения $f_+\colon X_+ \to Y_+$, полагая $f_+(\infty) = \infty$.
(a) Найдите условие на f, необходимое и достаточное для того, чтобы f_+ было непрерывным. (Отображения f, удовлетворяющие этому условию, называются *собственными*.)
(b) Приведите пример непрерывного отображения, не являющегося собственным.
(c) Докажите, что собственное отображение хаусдорфова пространства в локально компактное хаусдорфово пространство замкнуто.

[1] Неважно какой, т.к. на конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны — см. лекцию.