

3.1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Для любых $x, y \in X$ положим

$$\rho'(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}.$$

Покажите, что ρ' — метрика, порождающая ту же самую топологию, что и метрика ρ . (Преимущество ρ' в том, что в этой метрике пространство X ограничено.)

3.2. Покажите, что произведение счетного семейства метризуемых топологических пространств метризуемо. (*Указание:* $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x_n, y_n)/2^n$.) Верно ли это для несчетных произведений?

3.3. Метризуемо ли дизъюнктное объединение метризуемых топологических пространств?

3.4. Покажите, что канторово множество гомеоморфно произведению счетного семейства «двочеточий» (дискретных двухэлементных пространств).

3.5 (*кривая Пеано*). **(a)** Пусть C — канторово множество. Постройте непрерывную сюръекцию $C \rightarrow [0, 1]$. (*Указание:* она известна Вам из курса анализа.)

(b) Докажите, что $C \times C$ гомеоморфно C .

(c) Постройте непрерывную сюръекцию $C \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$.

(d) Пусть $A \subset [0, 1]$ — замкнутое множество и $B \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Докажите, что каждое непрерывное отображение $A \rightarrow B$ продолжается до непрерывного отображения $[0, 1] \rightarrow B$.

(e) Постройте непрерывную сюръекцию $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$.

3.6. Для каждой пары топологических пространств из следующего списка докажите, что они не гомеоморфны: **(a)** интервал и полуинтервал; **(b)** полуинтервал и отрезок; **(c)** отрезок и квадрат; **(d)** отрезок и окружность.

3.7. Опишите связные компоненты канторова множества.

3.8. Положим

$$X = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) Докажите, что X связно, но не линейно связно.

(b) Опишите линейно связные компоненты пространства X . Замкнуты ли они в X ? (Для сравнения напомним, что связные компоненты любого топологического пространства замкнуты.)

3.9. Пусть подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$ счетно. Обязательно ли $\mathbb{R}^2 \setminus X$ линейно связно?

3.10. Верно ли, что **(a)** произведение любого семейства линейно связных топологических пространств линейно связно; **(b)** произведение любого семейства связных топологических пространств связно?