2.1. Пусть X — множество. Докажите, что последовательность функций (f_n) в $\mathbb{R}^X$ сходится к функции f в топологии поточечной сходимости (определение см. в списке 1) тогда и только тогда, когда числовая последовательность $(f_n(x))$ сходится к $f(x)$ для каждого $x \in X$.

2.2. Снабдим пространство $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ топологией поточечной сходимости. Найдите замыкание в $\mathbb{R}^\mathbb{R}$
(a) множества всех многочленов;
(b) множества всех функций, отличных от нуля лишь в конечном множестве точек.

2.3. Пусть X — множество. Снабдим X топологией, объявив замкнутыми все не более чем счетные подмножества X, а также само X.
(a) Докажите, что эта конструкция действительно задает топологию на X.
(b) Найдите простой критерий сходимости последовательности в X.
(c) Может ли сходящаяся последовательность в X иметь более одного предела?
(d) Обязательно ли X хаусдорфово?

2.4. Приведите пример
(a) топологического пространства X и его подмножества A, не всякая точка замыкания которого является пределом последовательности точек из A;
(b) секвенциально непрерывного отображения топологических пространств, не являющегося непрерывным.

2.5. Докажите сепарабельность пространств **(a)** $\mathbb{R}^n$ (со стандартной топологией; см. задачу 1.4); **(b)** ℓ^1; **(c)** ℓ^2; **(d)** $C[a,b]$ (с топологией, порожденной равномерной метрикой).

2.6. Докажите, что пространство ℓ^∞ несепарабельно.

2.7. **(a)** Докажите, что сепарабельное метризуемое пространство (в частности, любое пространство из задачи 2.5) имеет счетную базу.
(b) Приведите пример, показывающий, что для неметризуемых пространств это неверно.

2.8. Определим отображение $f\colon [0,1) \to S^1$ (где $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ — окружность) формулой $f(t) = e^{2\pi i t}$. Является ли f **(a)** непрерывной биекцией; **(b)** открытым отображением; **(c)** замкнутым отображением; **(d)** гомеоморфизмом?

2.9. Постройте (задайте явной формулой) гомеоморфизм между окружностью $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ и границей квадрата $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\}=1\}$. (Топология на обоих пространствах порождается обычной евклидовой метрикой.)

2.10. Пусть X — нормированное пространство. Постройте (задайте явными формулами) гомеоморфизмы между
(a) открытыми шарами $B_r(x) = \{y \in X : \|y-x\| < r\}$ и $B_1(0)$;
(b) открытым шаром $B_1(0)$ и пространством X.

2.11. Докажите, что стереографическая проекция — гомеоморфизм между $S^2 \setminus \{p\}$ и $\mathbb{R}^2$.