Напомним (см. лекция), что нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ определяются формулами

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i|,\quad \|x\|_2=\Bigl(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\Bigr)^{1/2},\quad \|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \quad (\text{где } x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n).$$

Для $p\in\{1,2,\infty\}$ и $r>0$ положим $B_r^{(p)}=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_p<r\}$.

1.1. **(a)** Нарисуйте единичный шар $B_1^{(p)}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ для $p=1,2,\infty$. Какие между этими шарами есть отношения включения?
(b) Найдите наибольшие $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3>0$ такие, что $B_1^{(1)}\supset B_{\varepsilon_1}^{(2)}$, $B_1^{(2)}\supset B_{\varepsilon_2}^{(\infty)}$ и $B_1^{(1)}\supset B_{\varepsilon_3}^{(\infty)}$. Нарисуйте картинки, соответствующие этим включениям.

1.2. **(a)** Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — две нормы на векторном пространстве X (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), и пусть B и B' — соответствующие открытые шары в X с центром в нуле радиуса 1. Докажите, что $B\subset B' \iff \|\cdot\|'\leqslant\|\cdot\|$.
(b) Каким неравенствам между нормами $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbb{R}^2$ соответствуют включения из задачи 1.1?

1.3. Зафиксируем $n\in\mathbb{N}$. Для каждой пары $p,q\in\{1,2,\infty\}$ укажите наименьшую константу $C=C_{p,q}>0$ такую, что $\|\cdot\|_p\leqslant C\|\cdot\|_q$ на $\mathbb{R}^n$. (Указание: для $n=2$ ответ уже известен из предыдущей задачи.)

1.4. Докажите, что нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ порождают одну и ту же топологию на $\mathbb{R}^n$ (так называемую *стандартную* топологию).

Пусть $p\in\mathbb{N}$ — простое число. Напомним (см. лекцию), что *p-адическая норма* $|x|_p$ числа $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ определяется следующим образом: запишем x в виде $x=p^r a/b$, где $a,r\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$, причем p не делит ни a, ни b, и положим $|x|_p=p^{-r}$. Также полагаем по определению $|0|_p=0$.

1.5. Докажите, что p-адическая норма на $\mathbb{Q}$ обладает следующими свойствами: **(1)** $|x|_p>0$ для $x\neq 0$; **(2)** $|xy|_p=|x|_p|y|_p$ для всех x,y; **(3)** $|x+y|_p\leqslant\max\{|x|_p,|y|_p\}$ для всех x,y. Выведите из этих свойств, что $\rho_p(x,y)=|x-y|_p$ — метрика на $\mathbb{Q}$.

Метрика ρ на множестве X называется *неархимедовой* (или *ультраметрикой*), если неравенство треугольника выполняется в следующем усиленном виде: $\rho(x,z)\leqslant\max\{\rho(x,y),\rho(y,z)\}$ для всех $x,y,z\in X$. Например, p-адическая метрика на $\mathbb{Q}$ неархимедова (см. п. 3 задачи 1.5).

1.6. Докажите, что в метрическом пространстве с неархимедовой метрикой **(a)** все треугольники равнобедренные (вначале строго сформулируйте соответствующее утверждение!); **(b)** каждая точка шара (неважно, открытого или замкнутого) является его центром; **(c)** любые два шара (неважно, открытых или замкнутых) либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом; **(d)** всякая сфера положительного радиуса открыта; **(e)** всякий замкнутый шар положительного радиуса открыт; **(f)** всякий открытый шар замкнут.

Пусть X —метрическое пространство и $A,B\subset X$ — ограниченные множества. Напомним (см. лекцию), что *расстояние Хаусдорфа* между A и B определяется формулой

$$\rho_H(A,B)=\max\bigl\{\sup\nolimits_{a\in A}\rho(a,B),\ \sup\nolimits_{b\in B}\rho(b,A)\bigr\}.$$

1.7. Пусть X — метрическое пространство. Докажите, что
(a) для любых ограниченных множеств $A,B\subset X$ справедливо равенство

$$\rho_H(A,B)=\inf\bigl\{r>0 : A\subset U_r(B),\ B\subset U_r(A)\bigr\},$$

где $U_r(A)=\{x\in X : \rho(x,A)<r\}$ — r-окрестность A;
(b) расстояние Хаусдорфа является метрикой на классе всех замкнутых ограниченных подмножеств пространства X.

Пусть X — множество, $\mathbb{K}^X$ — пространство всех $\mathbb{K}$-значных функций на X (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Зафиксируем какую-нибудь подалгебру $A \subset \mathbb{K}^X$ (т.е. векторное подпространство в $\mathbb{K}^X$, содержащее функцию, тождественно равную 1, и вместе с любыми двумя функциями содержащее их произведение). Для каждого подмножества $S \subset A$ положим

$$V(S) = \{x \in X : \forall f \in S \; f(x) = 0\}.$$

Напомним (см. лекцию), что *топология Зарисского* на X (соответствующая алгебре A) — это такая топология на X, в которой замкнуты множества вида $V(S)$ для всевозможных $S \subset A$ и только они.

1.8. (a) Докажите, что топология Зарисского действительно является топологией. Опишите ее в явном виде для следующих случаев:
(b) X — любое множество, $A = \mathbb{K}^X$;
(c) $X = \mathbb{K}$, $A = \mathbb{K}[t]$ (алгебра многочленов);
(d) $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $A = C[a, b]$ (алгебра непрерывных функций).
Ответ к п. (d): эта топология совпадает с обычной топологией на $[a, b]$.

Пусть X — множество. Зафиксируем подмножество $S \subset \mathbb{K}^X$. Для $x \in X$ и интервала $I \subset \mathbb{R}$ положим

$$G(x, I) = \{f \in S : f(x) \in I\}.$$

Напомним (см. лекцию), что *топология поточечной сходимости* на S — это топология, предбазу которой образуют множества $G(x, I)$ для всевозможных $x \in X$ и всевозможных интервалов $I \subset \mathbb{R}$.

1.9. Пусть X — множество.
(a) Докажите, что топология поточечной сходимости на $\mathbb{R}^X$ хаусдорфова.
(b) Докажите, что если X несчетно, то для любой $f \in \mathbb{R}^X$ пересечение любого счетного семейства ее окрестностей является бесконечным множеством. Как следствие, $\mathbb{R}^X$ не удовлетворяет первой аксиоме счетности и тем более неметризуемо.
(c) Снабдим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ топологией поточечной сходимости. Докажите, что у каждой $f \in C[a, b]$ существует счетное семейство окрестностей, пересечение которого есть $\{f\}$; однако $C[a, b]$ все равно не удовлетворяет первой аксиоме счетности и тем более неметризуемо.