ЛИСТОК 3

Задача 1. Пусть S^1 — окружность единичного радиуса с центром в начале координат, а $f : S^1 \to S^1$ — непрерывное нечетное отображение: $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in S^1$. Докажите, что f не гомотопно отображению, переводящему S^1 в точку.

Прямая ℓ на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$, где $(a, b) \neq (0, 0)$ и коэффициенты $a, b, c \in \mathbb{R}$ определены однозначно с точностью до умножения на число $t \neq 0$: $(a, b, c) \mapsto (ta, tb, tc)$. Таким образом, в множестве прямых на плоскости вводится топология фактор-пространства $L \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \neq (0, 0)\}/\big((a, b, c) \sim (ta, tb, tc)\big)$.

Задача 2. а) Докажите, что множество $A \subset L$ прямых на плоскости, пересекающих круг D единичного радиуса с центром в начале координат, гомеоморфно ленте Мебиуса. б) Вычислите фундаментальную группу $\pi_1(A)$. в) Пусть ω — граница круга D (окружность едининчного радиуса с центром в начале координат). Для произвольной точки $x \in \omega$ обозначим $f(x) \in A$ касательную к ω в точке x. Вычислите гомоморфизм групп $f_* : \mathbb{Z} = \pi_1(\omega) \to \pi_1(A)$.

Задача 3. Пусть $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ — универсальное накрытие, $\Omega \subset \mathbb{T}^2$ — открытый круг (представим $\mathbb{T}^2$ как фактор-пространство квадрата $[-1, 1]^2$ по отождествлениям $(1, t) \sim (-1, t)$ и $(t, 1) \sim (t, -1)$ для всех $-1 \leq t \leq 1$; тогда Ω — круг радиуса $1/2$ с центром в точке $(0, 0)$). Обозначим $E \stackrel{\text{def}}{=} p^{-1}(\mathbb{T}^2 \setminus \Omega)$. а) Докажите, что $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \Omega)$ изоморфна свободной группе $\mathcal{F}_2$ с двумя образующими a и b. б) Пусть $G \subset \mathcal{F}_2$ — подгруппа, соответствующая накрытию $p|_E : E \to \mathbb{T}^2 \setminus \Omega$. Опишите подгруппу G явно, докажите, что она нормальна и что фактор-группа $\mathcal{F}_2/G$ изоморфна $\mathbb{Z}^2$.

Задача 4. Декартово произведение $P \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times S^1$, где Ω — открытый круг, называется полноторием. а) Пусть $a \in P$. Докажите изоморфность групп $\pi_1(P \setminus \{a\}) = \pi_1(P) = \mathbb{Z}$. б) Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^3$ — окружность. Постройте гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$ и полнотория без точки ($P \setminus \{a\}$, где $P = \Omega \times S^1$). в) Приведите пример петли в $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$, класс гомотопии которой соответствует элементу $1 \in \mathbb{Z} = \pi_1(P \setminus \{a\})$.