Для сдачи задачи 2.1 необходимо и достаточно сдать решения двух ее пунктов на выбор преподавателя (кроме комбинации **(a)**+**(b)***).*

2.1. Приведите пример
(a) метрики на $\mathbb{R}$, которая порождает обычную топологию на $\mathbb{R}$, но в которой $\mathbb{R}$ неполно;
(b) метрики на $(0,1)$, которая порождает обычную топологию на $(0,1)$, но в которой $(0,1)$ полно;
(c) гомеоморфизма метрических пространств, не являющегося равномерно непрерывным;
(d) равномерного гомеоморфизма $f\colon X \to Y$ метрических пространств, не являющегося липшицевым (т.е. такого, что не существует $C > 0$, для которого $\rho(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x, y)$ при всех $x, y \in X$);
(e) непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ метрических пространств, которое переводит некоторую фундаментальную последовательность в пространстве X в нефундаментальную последовательность в пространстве Y.

2.2. Пусть $X = [0,1) \cup [2,3) \cup \{4\}$ (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$). Существует ли подмножество $Y \subset \mathbb{R}$, которому гомеоморфна одноточечная компактификация X_+ пространства X? Существует ли локально компактное пространство, не гомеоморфное X, одноточечная компактификация которого гомеоморфна X_+?

2.3. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant 1\}$. Введем на D следующее отношение эквивалентности: $z \sim w$ тогда и только тогда, когда $z = i^k w$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что факторпространство $D/{\sim}$ гомеоморфно D.

2.4. Можно ли представить $\mathbb{R}$ в виде объединения счетного семейства подмножеств, гомеоморфных канторову множеству?

2.5. Докажите, что подмножество $X \subset \ell^1$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, ограничено и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\sum_{k>n} |x_k| < \varepsilon$ для всех $x \in X$. (Разрешается пользоваться полнотой пространства ℓ^1.)