Введение в топологию

Вопросы к экзамену 26.03.2019

1. Гомотопия отображений. Согласованность гомотопии с композициями. Гомотопия относительно подмножества. Пример: линейная гомотопия отображений со значениями в выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^n$.

2. Гомотопия путей. Пример: замена параметра. Произведение путей и их гомотопических классов. Свойства операции умножения гомотопических классов путей. Фундаментальная группа.

3. Зависимость фундаментальной группы от отмеченной точки. Односвязные пространства, их эквивалентные определения (через петли и через пути). Односвязность выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$.

4. Поднятия отображений $Y \to S^1$ до отображений $Y \to \mathbb{R}$: единственность (для произвольного связного пространства Y) и существование (для компактного звездного подмножества $Y \subset \mathbb{R}^n$).

5. Степень (= вращение) петли $[0,1] \to (S^1, 1)$. Свойства степени. Фундаментальная группа окружности.

6. Лемма о лебеговом числе. Односвязность n-мерной сферы при $n \geqslant 2$.

7. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением топологических пространств. Ретракции. Примеры. Несуществование ретракции замкнутого круга на его границу. Теорема Брауэра о неподвижной точке (двумерный случай).

8. Фундаментальная группа произведения. Примеры: фундаментальная группа тора и фундаментальная группа $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

9. Категории, функторы, их примеры (в т.ч. из топологии: гомотопическая категория, гомотопическая категория пространств с отмеченной точкой, фундаментальная группа как функтор).

10. Гомотопическая эквивалентность и ее категорная интерпретация. Деформационные ретракции и строгие деформационные ретракции. Сфера S^n как строгий деформационный ретракт $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Биекция $\pi_0(X) \cong [\mathrm{pt}, X]$. Следствие: гомотопическая инвариантность свойства линейной связности.

11. Стягиваемые пространства, их эквивалентные определения, примеры.

12. Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп: случаи пространств с отмеченной точкой и без. Односвязность стягиваемых пространств.

13. Накрытия. Примеры накрытий. Число листов накрытия, его независимость от выбора точки базы (если последняя связна). Теорема о единственности поднятия.

14. Теорема о накрывающей гомотопии. Следствие: теорема о поднятии путей.

15. Теорема о поднятии гомотопий путей. Теорема о действии фундаментальной группы на слое накрытия (действие монодромии). Свободность этого действия в случае односвязного накрывающего пространства: Приложение: фундаментальная группа вещественного проективного пространства.

16. Стабилизатор точки при действии группы. Сопряженность стабилизаторов точек из одной орбиты. Морфизмы G-множеств. Изоморфизм между орбитой и множеством смежных классов по стабилизатору. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный накрывающим отображением: его мономорфность и описание его образа как стабилизатора точки слоя. Следствие: изоморфизм между слоем накрытия и множеством смежных классов фундаментальной группы базы накрытия.

17. Критерий существования поднятия отображения $(Y, y_0) \to (X, x_0)$ до отображения $(Y, y_0) \to (E, a_0)$, где $(E, a_0) \to (X, x_0)$ — накрытие. Следствие: существование и единственность поднятия отображения из односвязного пространства.

18. Категории накрытий (с отмеченной точкой и без). Категория подгрупп в группе. Функтор $\mathscr{F}^*$ из категории $\mathrm{Cov}_0^*(X, x_0)$ связных пунктированных накрытий в категорию подгрупп фундаментальной группы. Строгие и полные функторы. Примеры. Описание морфизмов в категории $\mathrm{Cov}_0^*(X, x_0)$. Строгость и полнота функтора $\mathscr{F}^*$. Следствие: критерий изоморфизма накрытий в $\mathrm{Cov}_0^*(X, x_0)$.

19. Ограничение накрывающего отображения на компоненты накрывающего пространства. Орбиты действия монодромии.

20. Морфизмы транзитивных G-множеств (критерий существования в терминах стабилизаторов). Изоморфизмы транзитивных G-множеств и классы сопряженных подгрупп. Функтор $\mathscr{F}$ из категории накрытий $\mathrm{Cov}(X)$ в категорию $\pi_1(X, x_0)$-множеств. Его строгость и полнота. Следствие: критерий изоморфизма связных накрытий в $\mathrm{Cov}(X)$.

21. Теорема о том, что всякий морфизм связных накрытий сам является накрывающим отображением.

22. Инициальные и терминальные объекты в категориях. Примеры. Универсальное накрытие и его интерпретация как инициального объекта. Относительно односвязные подмножества и полулокально односвязные пространства. Примеры и контрпримеры. Необходимое условие существования универсального накрытия.

23. Теорема о существовании универсального накрытия. Примеры универсальных накрытий.

24. Морфизмы и изоморфизмы функторов. Примеры. Понятие эквивалентности категорий. Примеры. Построение функтора $\mathscr{G}$ из категории $\pi_1(X, x_0)$-множеств в категорию накрытий $\mathrm{Cov}(X)$.

25. Теорема об эквивалентности категории накрытий $\mathrm{Cov}(X)$ и категории $\pi_1(X, x_0)$-множеств.

26. Теорема об эквивалентности категории накрытий $\mathrm{Cov}(X)$ и категории $\pi_1(X, x_0)$-множеств (формулировка). Следствие: эквивалентность категории связных накрытий пространства X и категории транзитивных $\pi_1(X, x_0)$-множеств. Следствие: эквивалентность категории связных пунктированных накрытий пространства X и категории подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$. Следствия: теоремы о классификации связных накрытий и о классификации связных пунктированных накрытий в терминах подгрупп фундаментальной группы.