Введение в топологию

Вопросы к коллоквиуму 26.01.2019

1. Метрические пространства, нормированные пространства, евклидовы пространства. Примеры. Открытые множества в метрическом пространстве, их свойства. Открытость открытого шара.

2. Топологические пространства. Хаусдорфовость, метризуемость. Примеры топологических пространств. База и предбаза топологии, база и предбаза в точке; примеры. Необходимое и достаточное условие, при котором семейство множеств является базой некоторой топологии. Первая и вторая аксиомы счетности.

3. Сходимость последовательностей в топологическом пространстве. Описание сходящихся последовательностей в метрическом пространстве. Единственность предела последовательности в хаусдорфовом пространстве.

4. Замыкание множества в топологическом пространстве. Свойства операции замыкания. Описание замыкания через последовательности в пространствах с первой аксиомой счетности. Внутренность и граница множества, предельные и изолированные точки; примеры. Плотные множества и сепарабельные пространства.

5. Непрерывные отображения топологических пространств. Эквивалентность непрерывности и секвенциальной непрерывности для пространств с первой аксиомой счетности. Критерии непрерывности (в терминах прообразов открытых или замкнутых множеств, в терминах непрерывности в точке, в терминах операции замыкания). Гомеоморфизмы. Открытые и замкнутые отображения. Примеры гомеоморфизмов.

6. Индуцированная топология на подпространстве топологического пространства. Ее описание в метрическом случае. Характеристическое свойство индуцированной топологии. Замкнутые подмножества и замыкание в индуцированной топологии.

7. Инициальная топология, порожденная семейством отображений. Характеристическое свойство инициальной топологии. Произведения топологических пространств. База произведения. Универсальное свойство произведения.

8. Метризуемость конечного произведения метризуемых пространств. Произведение семейства непрерывных отображений.

9. Финальная топология, порожденная семейством отображений. Характеристическое свойство финальной топологии. Дизъюнктные объединения топологических пространств. Универсальное свойство дизъюнктного объединения.

10. Связные топологические пространства. Примеры. Связность отрезка. Основные свойства связных пространств.

11. Линейно связные топологические пространства и их связность. Основные свойства линейно связных пространств. Примеры. Описание связных подмножеств прямой.

12. Связные и линейно связные компоненты, их свойства, примеры. Локально линейно связные пространства и свойства их компонент.

13. Компактные топологические пространства. Примеры. Компактность замкнутого куба в $\mathbb{R}^n$. Критерий компактности в терминах замкнутых множеств. Критерий компактности подпространства (в терминах покрытий множествами, открытыми в топологии объемлющего пространства).

14. Основные свойства компактных топологических пространств (связь компактности подпространств и их замкнутости, свойства непрерывных отображений из компактного пространства). Критерий компактности подмножества в $\mathbb{R}^n$. Основное свойство функций на компактном пространстве со значениями в $\mathbb{R}$.

15. Теорема Александера о предбазе. Теорема Тихонова о компактности произведения.

16. Понятия мажорирования и эквивалентности норм на векторном пространстве. Критерий мажорирования одной нормы другой. Теорема об эквивалентности норм на конечномерном векторном пространстве.

17. Локально компактные топологические пространства. Примеры и контрпримеры. Локальная компактность конечных произведений, замкнутых и открытых подмножеств.

18. Одноточечная компактификация, ее основные свойства (компактность, критерий хаусдорфовости...). «Единственность» одноточечной компактификации. Примеры одноточечных компактификаций.

19. Факторпространства топологических пространств. Характеристическое свойство фактортопологии. Универсальное свойство факторпространств. Факторные отображения, их эквивалентные определения и свойства. Достаточные условия факторности. Примеры факторпространств.

20. Частные случаи факторизации: стягивание подмножества в точку и склейка по отображению. Примеры. Вещественное проективное пространство, его эквивалентные определения (как факторпространство $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ и как факторпространство S^n), компактность и хаусдорфовость.

21. Полные метрические пространства. Связь между замкнутостью и полнотой подпространств. Равномерно непрерывные, липшицевы и изометрические отображения. Сохранение фундаментальности последовательностей при равномерно непрерывных отображениях. Инвариантность полноты при равномерных гомеоморфизмах.

22. Полнота произведения двух полных метрических пространств. Полнота конечномерных нормированных пространств.

23. Полнота пространств $\ell^\infty(X)$ и $C_b(X)$.

24. Теорема о вложенных замкнутых множествах. Теорема Бэра.

25. Принцип сжимающих отображений.

26. Теорема о продолжении равномерно непрерывных отображений с плотного подмножества.

27. Пополнение метрического пространства. Существование пополнения. Универсальное свойство пополнения. Единственность пополнения. Естественность пополнения.

28. Счетно компактные топологические пространства. Характеризация счетной компактности в терминах строгих предельных точек. Эквивалентность понятий предельной точки и строгой предельной точки для T_1-пространств.

29. Секвенциально компактные топологические пространства. Взаимосвязи компактности, счетной компактности и секвенциальной компактности: (1) в общем случае; (2) для пространств с 1-й аксиомой счетности; (3) для пространств со счетной базой.

30. Вполне ограниченные метрические пространства, их простейшие свойства, примеры и контрпримеры (ограниченность не влечет полную ограниченность). Полная ограниченность ограниченных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Характеризация полной ограниченности в терминах последовательностей.

31. Критерий компактности метрического пространства (компактность $\iff$ секвенциальная компактность $\iff$ счетная компактность $\iff$ полная ограниченность + полнота). Следствия из критерия компактности. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

32. Теорема Арцела–Асколи.

33. Теорема Стоуна–Вейерштрасса. Следствия: классические теоремы Вейерштрасса об аппроксимации многочленами и тригонометрическими многочленами.

34. Регулярные и нормальные топологические пространства. Характеризации регулярности и нормальности в терминах окрестностей. Регулярность локально компактных хаусдорфовых пространств. Нормальность компактных хаусдорфовых пространств и метризуемых пространств.

35. Лемма Урысона.

36. Теорема Титце–Урысона.