Компактные операторы

5.1. Пусть X — нормированное пространство, $f \in X^* \setminus \{0\}$ и $X_0 = \operatorname{Ker} f$. Докажите, что в X существует 0-перпендикуляр к X_0 тогда и только тогда, когда f достигает нормы (т.е. существует такой $x \in X$, $\|x\| = 1$, что $|f(x)| = \|f\|$). Приведите пример, показывающий, что это не всегда так.

5.2. **(a)** Докажите, что подмножество $S \subset c_0$ относительно компактно тогда и только тогда, когда существует такой элемент $y \in c_0$, что $|x_n| \leqslant |y_n|$ для всех $x \in S$ и всех $n \in \mathbb{N}$. **(b)** Верно ли аналогичное утверждение для ℓ^p?

5.3. Компактны ли операторы правого и левого сдвига в ℓ^p и c_0?

5.4. Может ли образ компактного оператора между банаховыми пространствами содержать бесконечномерное замкнутое подпространство?

5.5. Докажите компактность оператора вложения $C^1[a,b] \to C[a,b]$.

5.6. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для компактности M_f.

5.7. Для интегрируемой функции f на $[0,1]$ определим функцию Tf формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Является ли T компактным оператором **(a)** из $C[0,1]$ в $C[0,1]$? **(b)** из $L^p[0,1]$ в $C[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)? **(c)** из $L^p[0,1]$ в $L^p[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)? **(d)** из $L^1[0,1]$ в $C[0,1]$? **(e)** из $L^1[0,1]$ в $L^1[0,1]$?

5.8. Пусть $I = [a,b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Докажите компактность *интегрального оператора* $T\colon C(I) \to C(I)$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy.$$

5.9. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Докажите компактность *интегрального оператора Гильберта–Шмидта* $T\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$,

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\,d\mu(y).$$

Указание: докажите, что линейная оболочка множества функций вида $K(x,y) = f(x)g(y)$, где $f, g \in L^2(X,\mu)$, плотна в $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и воспользуйтесь тем, что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$ (см. прошлый семестр).

5.10. **(a)** Пусть X — метризуемый компакт, $K \in C(X \times X)$, μ — конечная борелевская мера на X. Докажите, что образ интегрального оператора Гильберта–Шмидта $T_K\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ содержится в $C(X)$, и что T_K является компактным оператором из $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$.
(b)-B Докажите то же, что в п. (a), для произвольного (не обязательно метризуемого) компакта X в предположении регулярности μ.

5.11. Вычислите норму оператора $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ из задачи 5.7. (*Указание:* оператор T^*T компактен и самосопряжен.)

Фредгольмовы операторы

5.12. Что можно сказать об операторе, который компактен и фредгольмов одновременно?

5.13. Пусть $a_0, \ldots, a_n \in C^p[a,b]$. Докажите, что оператор

$$D\colon C^{p+n}[a,b] \to C^p[a,b], \quad D(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

фредгольмов, и вычислите его индекс.

5.14. Докажите, что оператор $D\colon C^1(S^1) \to C(S^1)$, $D(f) = f'$ фредгольмов, и вычислите его индекс.

5.15. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть M_λ — соответствующий диагональный оператор в ℓ^p или в c_0. Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_λ. Вычислите его индекс.

5.16. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для фредгольмовости M_f. Вычислите его индекс.

5.17. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ в H существует фредгольмов оператор индекса n.

5.18. Пусть X — банахово пространство, $T \in \mathscr{B}(X)$, $K \in \mathscr{K}(X)$ и $S = T + K$.
(a) Докажите, что если $\lambda \in \sigma(T)$ не является собственным значением T конечной кратности, то $\lambda \in \sigma(S)$.
(b) Докажите, что если T — сдвиг в $\ell^2(\mathbb{Z})$, то K можно подобрать так, что $\sigma(S) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ (в то время как $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$).

5.19. Для каждого из следующих операторов T найдите $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ и вычислите $\operatorname{ind}(T - \lambda\mathbf{1})$ для всевозможных $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$: **(a)** диагональный оператор в ℓ^p или в c_0; **(b)** оператор умножения на непрерывную функцию в $C[a,b]$ или на ограниченную измеримую функцию в $L^p[a,b]$; **(c)** оператор левого сдвига в ℓ^p или в c_0; **(d)** оператор правого сдвига в ℓ^p или в c_0; **(e)** оператор сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$; **(f)** произвольный компактный оператор.

5.20. (a) Пусть H — гильбертово пространство. Примем на веру утверждение[1] о том, что группа $\mathrm{GL}(H)$ обратимых ограниченных операторов в H линейно связна. Докажите, что фредгольмовы операторы $S, T \in \mathscr{B}(H)$ лежат в одной связной компоненте множества $\mathsf{Fred}(H)$ $\iff$ их можно соединить непрерывным путем в $\mathsf{Fred}(H)$ $\iff$ $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$.
(b) Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство и $\mathcal{Q}(H) = \mathscr{B}(H)/\mathscr{K}(H)$ — алгебра Калкина. Обозначим через G группу обратимых элементов в $\mathcal{Q}(H)$, а через $G_0 \subset G$ связную компоненту единицы. Докажите, что фредгольмов индекс индуцирует изоморфизм групп $G/G_0 \cong \mathbb{Z}$.

5.21-B. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, и пусть T_f — соответствующий оператор Тёплица в пространстве Харди $H^2(\mathbb{T})$. Напомним (см. лекцию), что если f не обращается в нуль, то T_f фредгольмов.
(a) Предположим, что $f(z) = 0$ для некоторого $z \in \mathbb{T}$. Докажите, что T_f не фредгольмов.
(b) Найдите $\sigma_{\mathrm{ess}}(T_f)$ в терминах f.
(c) Найдите $\|T_f\|$ в терминах f.

[1] Увы, доказать его мы не успеем…