

Спектры

4.1. Для каждой из следующих алгебр A дайте критерий обратимости ее элемента и найдите спектр каждого ее элемента: **(a)** $A = \mathbb{C}[t]$; **(b)** $A = \mathbb{C}[[t]]$; **(c)** $A = \mathbb{C}(t)$.

4.2. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция. Напомним (см. лекцию), что число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *существенным значением* f , если $\mu(f^{-1}(U)) > 0$ для любой окрестности $U \ni \lambda$. Также напомним (см. лекцию), что если f существенно ограничена, то ее спектр как элемента алгебры $L^\infty(X, \mu)$ равен множеству всех ее существенных значений.

(a) Приведите пример, показывающий, что значение f не обязано быть ее существенным значением.

(b) Приведите пример, показывающий, что существенное значение f не обязано быть ее значением.

(c) Докажите, что если $X = [a, b]$ — отрезок с мерой Лебега, а f непрерывна, то множество ее значений совпадает с множеством ее существенных значений.

4.3. Пусть A — унитарная алгебра, $a, b \in A$.

(a) Докажите, что элемент $1 - ab$ обратим тогда и только тогда, когда элемент $1 - ba$ обратим. (*Указание.* Можно сначала угадать формулу, выражающую $(1 - ba)^{-1}$ через $(1 - ab)^{-1}$, а потом проверить, что она верна. А чтобы ее угадать, можно предположить, что $A = \mathbb{C}$, $|a| < 1$ и $|b| < 1$, и забыть о коммутативности умножения в \mathbb{C} .)

(b) Докажите, что $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.

(c) Докажите, что если a или b обратим, то $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.

(d) Приведите пример, показывающий, что в общем случае $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$.

4.4. Пусть A — ненулевая унитарная алгебра. Найдите спектр любого ее **(a)** нильпотентного элемента; **(b)** идемпотентного элемента, отличного от 0 и 1.

4.5. Пусть A — ненулевая нормированная (не обязательно полная) алгебра. Верно ли, что спектр любого ее элемента компактен? Верно ли, что он непуст?

4.6. Верно ли, что $r(a) = \|a\|$ для любого $a \in A$, если **(a)** $A = L^\infty(X, \mu)$? **(b)** $A = C^n[a, b]$? (Напомним, что $C^n[a, b]$ — банахова алгебра с нормой $\|f\| = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\infty / k!$).

4.7 (*оператор взвешенного сдвига*). Пусть $H = \ell^2$ и $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Оператор

$$T_\alpha: H \rightarrow H, \quad T_\alpha(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$$

называется *оператором взвешенного сдвига*. (*Реклама:* такие операторы изучаются давно, но особую популярность приобрели в 90-х гг. прошлого века ввиду их важности для теории представлений компактных квантовых групп.) Вычислите $\|T_\alpha\|$, вычислите $r(T_\alpha)$ и приведите пример последовательности α , для которой оператор T_α квазинильпотентен, но не нильпотентен.

4.8 (*оператор Вольтерра*). Пусть $I = [a, b]$, $H = L^2(I)$ и $K \in L^2(I \times I)$. Оператор Вольтерра $V_K: L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ задается формулой

$$(V_K f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y) dy$$

(*Реклама:* операторы Вольтерра образуют один из наиболее классических и давно изучаемых классов линейных операторов; они играют важную роль в теории интегральных уравнений, описывающих различные физические процессы.)

(a) Докажите, что если функция K ограничена, то V_K квазинильпотентен.

(b)-В Докажите, что V_K квазинильпотентен для любой $K \in L^2(I \times I)$.

- 4.9.** Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры диагонального оператора в ℓ^∞ .
- 4.10.** Пусть (X, μ) — пространство с σ -конечной мерой, f — существенно ограниченная измеримая функция на X и M_f — оператор умножения на f , действующий в $L^p(X, \mu)$ (где $1 \leq p \leq \infty$). Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора M_f .
- 4.11.** Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора сдвига T_b в $\ell^2(\mathbb{Z})$, действующего по правилу $T_b(x)_i = x_{i-1}$ ($i \in \mathbb{Z}$). (*Указание:* замените T_b на унитарно эквивалентный оператор в $L^2(\mathbb{T})$, где $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, или, если угодно, в $L^2[-\pi, \pi]$.)
- 4.12.** Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры операторов правого и левого сдвига, действующих в пространстве c_0 .
- 4.13.** Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^1 .
- 4.14.** Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^∞ .
- 4.15.** Для фиксированного $\zeta \in \mathbb{T}$ определим оператор сдвига $T_\zeta: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ формулой $(T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1}z)$. Найдите его точечный, непрерывный и остаточный спектры.
- 4.16.** Докажите, что спектр биективной изометрии в банаховом пространстве содержится в \mathbb{T} .
- 4.17. (а)** Докажите, что в унитарной банаховой алгебре $A \neq 0$ не может существовать таких элементов a, b , что $[a, b] = ab - ba = 1$.
- (б)** Докажите, что алгебра дифференциальных операторов вида $\sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$, где $a_k \in \mathbb{C}[x]$ (она называется *алгеброй Вейля*) не имеет представлений ограниченными операторами в ненулевых банаховых пространствах.
- 4.18-В.** Пусть $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Алгебраическим *квантовым тором* называется алгебра A_q с двумя обратимыми образующими u, v и соотношением $uv = qvu$. (*Реклама:* эта алгебра играет важную роль в некоммутативной геометрии. Соотношения $uv = qvu$ тесно связаны с *каноническими коммутационными соотношениями* Г. Вейля в квантовой механике.)
- (а)** Докажите, что если $|q| \neq 1$, то A_q не имеет представлений ограниченными операторами в ненулевых банаховых пространствах.
- (б)** Пусть $|q| = 1$. Постройте унитарные операторы U, V в пространстве $L^2(\mathbb{T})$, удовлетворяющие соотношению $UV = qVU$ (они дают, таким образом, представление A_q в $L^2(\mathbb{T})$). *Подсказка:* см. задачи 4.10 и 4.15.
- (с)** Пусть $|q| = 1$, U и V — биективные изометрические линейные операторы в банаховом пространстве, удовлетворяющие соотношению $UV = qVU$. Найдите их спектры при условии, что q не является корнем из единицы.
- 4.19-В.** Пусть A — унитарная банахова алгебра и $B \subset A$ — подалгебра, содержащая 1_A . Докажите, что
- (а)** B^\times — открыто-замкнутое подмножество в $B \cap A^\times$;
- (б)** для каждого $b \in B$ спектр $\sigma_B(b)$ является объединением спектра $\sigma_A(b)$ и некоторого семейства ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$. (Неформально это означает, что $\sigma_B(b)$ получается из $\sigma_A(b)$ заклеиванием нескольких дыр.)
- 4.20-В.** Пусть $E = \{f \in C^\infty[0, 1] : f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Снабдим E sup -нормой $\|\cdot\|_\infty$ и рассмотрим оператор T в E , действующий по правилу $(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$. Для произвольной $g \in E$ и произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ решите уравнение $Tf - \lambda f = g$ относительно $f \in E$. (*Указание:* продифференцируйте и воспользуйтесь вариацией постоянных.) Не противоречит ли полученный ответ задаче 4.5?