Двойственность. Слабые топологии

3.1. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара векторных пространств. Докажите, что
(a) $\dim X < \infty \iff \dim Y < \infty \iff$ слабая топология $\sigma(X, Y)$ нормируема;
(b) слабая топология $\sigma(X, Y)$ метризуема $\iff$ размерность Y не более чем счетна;
(c) слабая топология на бесконечномерном нормированном пространстве и слабая* топология на пространстве, двойственном к бесконечномерному банахову пространству, неметризуемы.

3.2. Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathbb{K}^X$ (где X — множество) и докажите, что слабая топология на пространстве $\mathbb{K}^X$ совпадает с исходной.

3.3. Пусть e_n — числовая последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных. Исследуйте последовательность (e_n) на слабую сходимость в пространствах c_0 и ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$.

3.4. Приведите пример линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП X и Y, который непрерывен относительно слабых топологий на X и Y, но не непрерывен в исходных топологиях. (Для нормированных X и Y такого не бывает — см. лекцию.)

3.5-В. Докажите, что в пространстве ℓ^1 всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме (несмотря на то, что слабая топология на ℓ^1 строго слабее нормированной, — см. задачу 3.1).

3.6. Пусть X и Y — банаховы пространства и $S \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$. Обязательно ли существует такой оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, что $S = T^*$?

3.7. Отождествим $(\ell^1)^*$ с ℓ^∞ (см. прошлый семестр) и рассмотрим пространство c_0 как подмножество в $(\ell^1)^*$.
(a) Найдите ${}^\perp c_0$ и $({}^\perp c_0)^\perp$.
(b) Покажите, что c_0 слабо* секвенциально плотно в ℓ^∞.

Мораль: если X — нерефлексивное банахово пространство, то для замкнутого подпространства $N \subset X^*$ равенство $N = ({}^\perp N)^\perp$ может нарушаться; для рефлексивного же X оно верно всегда — см. лекцию. Кроме того, замкнутое подпространство $N \subset X^*$ может не быть слабо* замкнутым — в отличие от ситуации, когда X рефлексивно.

3.8. Пусть X — нерефлексивное банахово пространство. Покажите, что в X^* существует замкнутое векторное подпространство N, для которого $N \neq ({}^\perp N)^\perp$ и которое слабо* плотно в X^*.

Мораль: ситуация, описанная в предыдущей задаче, — закономерность, а не патология.

3.9. Придумайте пример инъективного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ между банаховыми пространствами X и Y, такого, что $\operatorname{Im} T^*$ не плотен в X^*. (*Указание:* X обязано быть нерефлексивным — см. лекцию. *Мораль:* для нерефлексивных пространств равенство $\overline{\operatorname{Im}(T^*)} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ может не выполняться.)

3.10. Пусть X и Y — нормированные пространства, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.
(a) Верно ли, что если T сюръективен, то T^* топологически инъективен? Верно ли обратное?
(b) Верно ли, что если $\operatorname{Im} T$ замкнут в Y, то $\operatorname{Im} T^*$ замкнут в X^*? Верно ли обратное?
(Для банаховых пространств ответ на эти вопросы положителен — см. лекцию.)
(c)-В Придумайте условие на T, необходимое и достаточное для того, чтобы T^* был топологически инъективным.

3.11. Пусть X — банахово пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Докажите, что X рефлексивно тогда и только тогда, когда X_0 и X/X_0 рефлексивны.