Топологические векторные пространства

2.1. Пусть X, Y — топологические векторные пространства. Докажите, что
(a) линейный оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен $\iff$ он непрерывен в нуле;
(b) множество $\mathscr{L}(X, Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y — векторное подпространство в пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y.

2.2. На каких из следующих топологических векторных пространств существует хотя бы одна непрерывная норма?
(a) $\mathbb{K}^X$ (где X — множество); **(b)** $C(X)$ (где X — метризуемое топологическое пространство);
(c) пространство голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, снабженное топологией, унаследованной из $C(U)$;
(d) $C^\infty[a, b]$; **(e)** $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество; **(f)** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.3. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P, нормируемо тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему конечному подсемейству.

2.4. (a)-(f) Какие пространства из задачи 2.2 нормируемы?

2.5. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P, метризуемо тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему не более чем счетному подсемейству.

Указание. Если $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность полунорм, то функция

$$\rho(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \min\{p_n(x - y), 1\} \quad \text{или, если хотите,} \quad \rho(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

удовлетворяет неравенству треугольника.

2.6. (a)-(f) Какие пространства из задачи 2.2 метризуемы?

2.7. Пусть X и Y — нормированные пространства. Докажите, что топология на $\mathscr{B}(X, Y)$, порожденная операторной нормой, не слабее сильной операторной топологии, а сильная операторная топология не слабее слабой операторной топологии.

2.8. Пусть T_ℓ и T_r — операторы левого и правого сдвига в ℓ^2. Исследуйте последовательности $(T_\ell^n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(T_r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ на сходимость **(a)** по норме в $\mathscr{B}(\ell^2)$; **(b)** в сильной операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$; **(c)** в слабой операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$.

2.9-B. Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые два семейства полунорм, каждое из которых задает хаусдорфову топологию, эквивалентны.

2.10. Пусть X — множество. Докажите, что для любой функции $f \in \mathbb{K}^X$ оператор умножения $M_f\colon \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X,\ M_f(g) = fg$, непрерывен.

2.11. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Докажите, что любой линейный дифференциальный оператор $\sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha D^\alpha$ в пространстве $C^\infty(U)$ (где $a_\alpha \in C^\infty(U)$) непрерывен.

2.12. Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Для $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Докажите, что топология компактной сходимости на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ порождается семейством полунорм $\{\|\cdot\|_{r,\infty} : 0 < r < R\}$, где $\|f\|_{r,\infty} = \sup_{n\geqslant 0} |c_n(f)| r^n$.

2.13. Напомним (см. лекцию), что стандартная топология на пространстве Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ порождается семейством полунорм $\{\|\cdot\|_{k,\ell} : k,\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, где $\|\varphi\|_{k,\ell} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \varphi^{(\ell)}(x)|$. Докажите, что та же топология порождается семействами полунорм

(a) $\{\|\cdot\|_\infty^{(p)} : p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, где $\|\varphi\|_\infty^{(p)} = \sup_{k\leqslant p,\, x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^{p/2} |\varphi^{(k)}(x)|$;

(b) $\{\|\cdot\|_1^{(p)} : p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, где $\|\varphi\|_1^{(p)} = \max_{k\leqslant p} \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{p/2} |\varphi^{(k)}(x)|\, dx$.

2.14-B. Пространство *быстро убывающих последовательностей* $s(\mathbb{Z})$ определяется так:

$$s(\mathbb{Z}) = \Big\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \|x\|_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n||n|^k < \infty \ \forall k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \Big\}.$$

Топология на $s(\mathbb{Z})$ порождается последовательностью полунорм $\{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Снабдите пространство $C^\infty(S^1)$ топологией (по аналогии с $C^\infty[a,b]$) и постройте топологический изоморфизм $C^\infty(S^1) \cong s(\mathbb{Z})$. (*Указание:* сопоставьте каждой функции из $C^\infty(S^1)$ последовательность ее коэффициентов Фурье.)

2.15. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $C_c^\infty(U)$ — пространство гладких функций на U с компактным носителем. Для каждого компакта $K \subset U$ положим $C_K^\infty(U) = \{f \in C^\infty(U) : \operatorname{supp} f \subset K\}$ и снабдим $C_K^\infty(U)$ топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$. По определению, *стандартная топология*[1] на $C_c^\infty(U)$ — это локально выпуклая топология, порожденная семейством всех тех полунорм, которые непрерывны на $C_K^\infty(U)$ для каждого компакта $K \subset U$.

(a) Докажите, что стандартная топология на $C_c^\infty(U)$ — сильнейшая локально выпуклая топология, в которой все включения $C_K^\infty(U) \hookrightarrow C_c(U)$ непрерывны.

(b) Докажите, что линейное отображение $C_c(U) \to Y$ (где Y — произвольное локально выпуклое пространство) непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на $C_K^\infty(U)$ для каждого компакта $K \subset U$.

(c) Докажите, что $C_c^\infty(U)$ хаусдорфово.

(d)-B Докажите, что последовательность (f_i) сходится к функции f в $C_c^\infty(U)$ тогда и только тогда, когда носители всех f_i и f содержатся в общем компакте $K \subset U$, и для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^n$ последовательность частных производных $(D^\alpha f_i)$ сходится к $D^\alpha f$ равномерно на K.

(e)-B Докажите, что $C_c^\infty(U)$ неметризуемо.

2.16-B. Пусть (X,μ) — пространство с конечной мерой, $L^0(X,\mu)$ — векторное пространство классов эквивлентности измеримых функций на X (функции считаются эквивалентными, если они равны μ-почти всюду). Для $f, g \in L^0(X,\mu)$ положим

$$\rho(f,g) = \int_X \min\{|f-g|, 1\}\, d\mu.$$

Докажите, что

(a) ρ — метрика, превращающая $L^0(X,\mu)$ в топологическое векторное пространство;

(b) последовательность измеримых функций сходится в $L^0(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда она сходится по мере;

(c) если X содержит бесконечное семейство дизъюнктных измеримых множеств положительной меры, то $L^0(X,\mu)$ не локально выпукло;

(d) $(L^0[0,1])^* = 0$.

[1] Коротко ее можно определить так: $C_c(U) = \varinjlim C_K(U)$ — индуктивный предел в категории локально выпуклых пространств.