Задачи в листках, помеченные буквой “B”, являются бонусными. За их решение будут начисляться дополнительные баллы.

Вложения и факторизации

1.1. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор.
(a) Докажите, что если T отображает замкнутый единичный шар пространства X на замкнутый единичный шар пространства Y, то T — коизометрия.
(b) Верно ли обратное утверждение?

1.2. Пусть $\alpha \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или c_0. Обозначим через M_α *диагональный оператор* в X, действующий по правилу $M_\alpha(x) = (\alpha_i x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Найдите условие на α, необходимое и достаточное для того, чтобы M_α был **(a)** топологически инъективен; **(b)** открыт; **(c)** изометричен; **(d)** коизометричен.

1.3. Пусть (Ω, μ) — пространство с σ-конечной мерой, и пусть f — измеримая ограниченная функция на Ω. Ответьте на вопросы **(a)** – **(d)** предыдущей задачи для *оператора умножения* M_f в пространстве $L^p(\Omega, \mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), действующего по правилу $g \mapsto fg$.

1.4. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Докажите, что
(a) факторполунорма на X/X_0 действительно является полунормой;
(b) топология на X/X_0, порожденная факторполунормой, является фактортопологией топологии на X (т.е. множество $U \subset X/X_0$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз при факторотображении $Q\colon X \to X/X_0$ открыт в X).

Определение 1.1. Пусть X — нормированное пространство. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n$ векторов из X *абсолютно сходится*, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$.

1.5. Докажите, что нормированное пространство полно тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится. (Этот факт был использован на лекции при доказательстве полноты факторпространств.)

1.6. Пусть (Ω, μ) — пространство с мерой и $B(\Omega)$ — пространство ограниченных измеримых функций на Ω, снабженное sup-нормой. Постройте изометрический изоморфизм между пространством $L^\infty(\Omega, \mu)$ и некоторым факторпространством пространства $B(\Omega)$. Выведите отсюда полноту пространства $L^\infty(\Omega, \mu)$.

1.7. Постройте **(a)** топологический изоморфизм между c_0 и некоторым факторпространством пространства $C[0, 1]$; **(b)** изометрический изоморфизм между ℓ^1 и некоторым факторпространством пространства $L^1[0, 1]$.

1.8. Пусть H — гильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — замкнутое векторное подпространство. Покажите, что ограничение факторотображения $Q\colon H \to H/H_0$ на ортогональное дополнение $H_0^\perp$ является изометрическим изоморфизмом $H_0^\perp$ на H/H_0. Как следствие, H/H_0 наделяется структурой гильбертова пространства.

Если S — множество, то через $\ell^1(S)$ обозначается пространство всех функций $f\colon S \to \mathbb{K}$, удовлетворяющих условию $\|f\|_1 = \sum_{s\in S} |f(s)| < \infty$. (Здесь под суммой $\sum_{s\in S}$ понимается супремум сумм по всевозможным конечным подмножествам S; если $S = \mathbb{N}$, то это то же самое, что сумма ряда в обычном смысле.)

1.9. (a) Докажите, что любое банахово пространство X изометрически изоморфно факторпространству пространства $\ell^1(S)$ для некоторого множества S.
(b)-B Докажите, что сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно факторпространству пространства ℓ^1.

Теоремы Банаха и Банаха–Штейнгауза

1.10 (*необходимость полноты в теореме Банаха–Штейнгауза*)**.** Приведите пример нормированного пространства X и последовательности (f_n) в X^*, ограниченной на каждом векторе (т.е. такой, что для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))$ ограничена), но не ограниченной по норме.

1.11. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства.
(a) Докажите, что билинейный оператор $T\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда существует такое $C \geqslant 0$, что $\|T(x,y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X,\ y \in Y$.
(b) Предположим, что X либо Y полно. Докажите, что любой раздельно непрерывный билинейный оператор $X \times Y \to Z$ непрерывен. (Раздельная непрерывность здесь означает, что для любых $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ отображения $Y \to Z$, $y \mapsto T(x_0, y)$, и $X \to Z$, $x \mapsto T(x, y_0)$, непрерывны.)
Указание: воспользуйтесь теоремой Банаха–Штейнгауза.
(c) Верно ли утверждение из п. (b) без предположения о полноте?

1.12-B. Пусть G — компактная топологическая группа и π — ее представление в банаховом пространстве X, непрерывное в том смысле, что отображение $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto \pi(g)x$, непрерывно. Докажите, что на X существует эквивалентная норма, относительно которой все операторы $\pi(g)$ изометричны. (*Предупреждение:* мера Хаара тут ни при чем!).

1.13. (a) Выведите теорему об обратном операторе из теоремы о замкнутом графике.
(c)-B Выведите теорему Банаха–Штейнгауза из теоремы о замкнутом графике.

1.14 (*необходимость полноты в теореме Банаха об обратном операторе*)**. (a)** Приведите пример банахова пространства X, нормированного пространства Y и биективного ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$, обратный к которому неограничен.
(b)-B Приведите пример нормированного пространства X, банахова пространства Y и биективного ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$, обратный к которому неограничен.

1.15. Предположим, что пространство $L^1(\mathbb{R})$ полно относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, причем из сходимости $f_n \to f$ по этой норме следует, что $\int_{-\infty}^t f_n(s)\,ds \to \int_{-\infty}^t f(s)\,ds$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Докажите, что норма $\|\cdot\|$ эквивалентна обычной норме на $L^1(\mathbb{R})$.

1.16-B. Для рефлексивных пространств выведите теорему Банаха об обратном операторе из теоремы Банаха–Штейнгауза.

Указание. Чтобы доказать, что биективный оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ является топологическим изоморфизмом, достаточно проверить ограниченность прообраза единичного шара при отображении T^*.