

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Вопросы к экзамену 24.05.2019

1. Спектр элемента алгебры. Спектры элементов алгебр \mathbb{C}^X , $\ell^\infty(X)$, $L^\infty(X, \mu)$. Поведение спектра при гомоморфизмах. Спектрально инвариантные подалгебры.
2. Теорема об отображении спектра для многочленов. Спектр обратного элемента.
3. Банаховы алгебры; примеры. Свойства группы обратимых элементов банаховой алгебры. Автоматическая непрерывность гомоморфизмов в \mathbb{C} . Компактность спектра элемента банаховой алгебры.
4. Резольвентная функция и ее свойства. Непустота спектра элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда–Мазура.
5. Спектральный радиус. Формула Бёрлинга–Гельфанда.
6. Части спектра линейного оператора (точечный, непрерывный и остаточный спектры). Описание частей спектра диагонального оператора.
7. Спектр двойственного оператора. Включения между частями спектра оператора и частями спектра его двойственного. Описание частей спектра для операторов левого и правого сдвига в ℓ^p (рефлексивный случай).
8. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Некомпактность сферы в бесконечномерном нормированном пространстве.
9. Компактные операторы: определение, простейшие примеры и контрпримеры. Свойства множества компактных операторов (замкнутое векторное подпространство в $\mathcal{B}(X, Y)$; компактность произведения компактного и ограниченного операторов).
10. Теорема Шаудера о компактности двойственного оператора.
11. Критерий компактности диагонального оператора. Аппроксимируемость компактных операторов в гильбертовом пространстве операторами конечного ранга.
12. Фредгольмовы операторы. Простейшие примеры. Замкнутость образа фредгольмова оператора (лемма Като).
13. Фредгольмов индекс. Фредгольмовость и индекс двойственного оператора. Аддитивность индекса.
14. Подъем и спуск линейного оператора; их свойства. Теорема Рисса об операторах вида “ $1 +$ компактный”. Альтернатива Фредгольма.
15. Свойства спектра компактного оператора в банаховом пространстве.
16. Критерий фредгольмовости Никольского–Аткинсона. Алгебра Калкина. Существенный спектр, его компактность и непустота.
17. Открытость множества фредгольмовых операторов и локальная постоянность индекса.

18. Сохранение фредгольмовости и индекса при компактных возмущениях. Теорема Никольского о фредгольмовых операторах индекса 0.
19. Оператор, сопряженный к оператору между гильбертовыми пространствами. Основные свойства операции перехода к сопряженному оператору. C^* -тождество. Связь между инвариантными подпространствами оператора и его сопряженного.
20. Самосопряженные операторы. Вещественность спектра самосопряженного оператора. Совпадение нормы самосопряженного оператора с его спектральным радиусом.
21. Теорема Гильберта-Шмидта о компактных самосопряженных операторах в гильбертовом пространстве.