

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
Вопросы к коллоквиуму 22.03.2019

1. Топологически инъективные операторы, открытые операторы, изометрии, коизометрии между нормированными пространствами. Критерии топологической инъективности и открытости оператора.
2. Факторпространства нормированных пространств. Универсальное свойство факторпространств и его следствия (в т.ч. условия, при которых оператор $X/\text{Ker } T \rightarrow \text{Im } T$ — топологический (соотв. изометрический) изоморфизм). Полнота факторпространств.
3. Свойство бочечности банаховых пространств. Теорема Банаха–Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) и ее следствия (в т.ч. критерий ограниченности подмножества нормированного пространства).
4. Теоремы Банаха об открытом отображении, об обратном операторе и о замкнутом графике.
5. Топологические векторные пространства. Топология, порожденная семейством полунорм. Непрерывность алгебраических операций, описание сходящихся последовательностей, критерий хаусдорфовости такой топологии. Локально выпуклые пространства и их «полинормируемость» (без доказательства). Примеры (пространства непрерывных и гладких функций, пространство Шварца, сильная и слабая операторные топологии).
6. Критерий непрерывности полунормы на локально выпуклом пространстве. Критерий непрерывности линейного оператора в терминах полунорм. Критерий мажорирования одного семейства полунорм другим. Примеры эквивалентных семейств полунорм.
7. Факторпространства топологических векторных пространств и локально выпуклых пространств. Критерий хаусдорфовости и универсальное свойство факторпространств. Линейные функционалы на локально выпуклых пространствах: продолжение с подпространств, разделение точек, разделение точек и подпространств.
8. Дуальные пары и слабые топологии. Описание линейных функционалов, непрерывных в слабой топологии. Критерий рефлексивности банахова пространства в терминах топологий на его двойственном.
9. Двойственные операторы между пространствами дуальных пар. Критерий существования двойственного оператора. Связь непрерывности линейного оператора между локально выпуклыми пространствами с его слабой непрерывностью и с существованием двойственного оператора (в т.ч. для частного случая нормированных пространств).
10. Аннуляторы подмножеств в дуальных парах. Частные случаи: аннулятор подмножества в локально выпуклом пространстве и преданнулятор подмножества в его двойственном пространстве. Простейшие свойства аннуляторов. Теорема о двойном аннуляторе для дуальных пар и для локально выпуклых пространств. Следствия (в т.ч. совпадение замыкания подпространства с его слабым замыканием и критерий плотности подпространства).

11. Описание пространств, двойственных к подпространствам и к факторпространствам локально выпуклых пространств (для нормированных пространств — с точностью до изометрического изоморфизма). Взаимосвязи между ядрами и образами операторов и их двойственных. Следствие: двойственность между инъективными операторами и операторами с плотным (в подходящей топологии) образом.
12. Двойственность между топологически инъективными и сюръективными операторами в банаховых пространствах.
13. Теорема об операторах с замкнутым образом между банаховыми пространствами. Лемма Джонсона о точных последовательностях банаховых пространств.
14. Равностепенная непрерывность семейств линейных отображений между топологическими векторными пространствами. Теорема Банаха–Алаоглу–Бурбаки.