

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТЕСТ — ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

- 1) Ответ:  $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ , проверяется подстановкой. Остальные ответы неверные.
- 2) 23 — простое число, поэтому  $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$  — поле. Поскольку  $23 \equiv 3 \pmod{4}$ , элемент  $-1 \in \mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$  не является квадратом. Поэтому из любых двух элементов  $u, -u \in \mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$  (где  $u \neq 0$ ) ровно один — квадрат. Имеем  $x^8 = (x^4)^2$ , так что если  $a$  квадратом не является, то решений нет (минимальное число решений 0). Если  $a = b^2$ , то  $x^8 - a = (x^4 - b)(x^4 + b)$ . Из двух чисел  $b$  и  $-b$  ровно одно — квадрат; пусть для определенности  $b = c^2$ . Тогда уравнение  $x^4 = (x^2)^2 = -b$  решений не имеет, а  $x^4 - b = (x^2 - c)(x^2 + c)$ . Из двух уравнений  $x^2 = c$  и  $x^2 = -c$  разрешимо ровно одно, причем имеет 2 корня. Так что максимальное число решений 2.
- 3) Ответ: для правильного симплекса  $5! = 120$  (любая перестановка пяти его вершин реализуется движением), для неправильного меньше и может быть по-разному.
- 4) Подходящие дроби к  $\alpha > 0$  должны чередоваться — то меньше  $\alpha$ , то больше. Здесь же  $17/19 > 9/11 > 10/13 > 13/17$ , так что число  $\alpha$  не существует.
- 5) Верхняя точка колеса движется быстрее всех — ее скорость вдвое больше скорости поезда.
- 6) Ответ: 1 или 2 части.
- 7) Как и в случае со сходимостью, ограниченность не теряется, если изменить любое конечное множество знаков. Отсюда вытекает, что вероятность ограниченности равна 0 или 1 (этот ответ считался правильным). Что на самом деле — 0 или 1 — составителям экзамена неизвестно. Вероятность сходимости равна 0 (потому что гармонический ряд расходится), вероятность ограниченности не меньше, так что и 0 и 1 подходят. Ответы “0” и “1” считались неправильными, т.к. непонятно, как их можно обосновать (если знаете, как, то свяжитесь с руководителями семинара).
- 8) Ответ: нет. Для любого бесконечно большого  $N$  число  $N/2$  тоже бесконечно большое.