Введение в топологию 2017/18 учебный год
Листок 2
Срок сдачи 09.02.2018

1. Пространство X называется локально связным, если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности $U \ni x$ существует связная окрестность $V \ni x$, $V \subseteq U$.

Приведите пример линейно связного, но не локально связного пространства.

2. Приведите пример полного метрического пространства X и последовательности вложенных замкнутых шаров $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \ldots$, для которой $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$.

3. Пусть C — канторово множество. Покажите, что произведение счетного семейства пространств, гомеоморфных C, также гомеоморфно C.

4. Докажите, что всякое открытое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^2$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$.

5. Приведите пример компактного линейно связного подмножества $X \subset \mathbb{R}^2$, для которого не существует непрерывной сюръекции $[0;1] \to X$.

6. Пусть $(X, \prec)$ — вполне упорядоченное множество, обладающее тем свойством, что само X несчетно, но для всякого $a \in X$ множество $\{x \in X \colon x \prec a\}$ является счетным. (Соответствующий ординал обозначается $\aleph_1$.) Введем на X топологию, в которой предбазу образуют всевозможные множества вида $\{x \colon x \prec a\}$ и $\{x \colon a \prec x\}$. Покажите, что X является хаусдорфовым, не является компактным, но при этом у всякой последовательности элементов X есть сходящаяся подпоследовательность.

7. Пусть X — произведение континуального семейства двоеточий. Заметим, что X компактно в силу теоремы Тихонова. Покажите, что не всякая последовательность в X имеет сходящуюся подпоследовательность. (*Указание:* континуум — это множество всех последовательностей из нулей и единиц.)