Введение в топологию, 2017/18 учебный год
Листок 1
Срок сдачи 19.01.2018

1. Приведите пример метрического пространства (X,ρ), точки $a \in X$ и числа $r > 0$ с тем свойством, что замкнутый шар

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in X \colon \rho(a,x) \leqslant r\}$$

не совпадает с замыканием открытого шара

$$B(a,r) = \{x \in X \colon \rho(a,x) < r\}.$$

2. Пусть $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; введем топологию на X следующим образом: подмножество $U \subset X$ назовем открытым, если оно либо не содержит ∞, либо содержит подмножество вида $\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant N\} \cup \{\infty\}$. Пусть теперь Y — другое топологическое пространство и $f \colon \mathbb{N} \to Y$ — отображение. Докажите, что последовательность $\{f(n)\}$ имеет предел в Y тогда и только тогда, когда f продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} \colon X \to Y$.

3. Пусть X — хаусдорфово пространство. Всегда ли верно, что $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ для любых $A, B \subset X$ (черта означает замыкание)?

4. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, и пусть $Y \subset X$. Покажите, что функция

$$f_Y \colon x \mapsto \inf_{y \in Y} \rho(x,y)$$

непрерывна на X.

5. Пусть X — метрическое пространство, и пусть $F_1, F_2 \subset X$ — замкнутые подмножества, причем $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Покажите, что существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

6. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$ — подмножество, связное в индуцированной топологии. Покажите, что его замыкание $\overline{Y}$ также связно в индуцированной топологии.

7. Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства, $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Покажите, что мощность подмножества $\overline{f(X)} \subset Y$ не превосходит мощности множества $2^{\mathcal{U}}$, где $\mathcal{U} \subset 2^X$ — семейство всех открытых подмножеств в X.