Введение в топологию

Вопросы к экзамену 06.03.2018

1. Локально компактные топологические пространства. Примеры и контрпримеры. Локальная компактность конечных произведений, замкнутых и открытых подмножеств.

2. Одноточечная компактификация, ее основные свойства (компактность, критерий хаусдорфовости...). «Единственность» одноточечной компактификации. Примеры одноточечных компактификаций.

3. Факторпространства топологических пространств. Характеристическое свойство фактортопологии. Универсальное свойство факторпространств. Факторные отображения, их эквивалентные определения и свойства. Достаточные условия факторности. Примеры факторпространств.

4. Частные случаи факторизации: стягивание подмножества в точку и склейка по отображению. Примеры. Вещественное проективное пространство, его эквивалентные определения (как факторпространство $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ и как факторпространство S^n), компактность и хаусдорфовость.

5. Полные метрические пространства. Связь между замкнутостью и полнотой подпространств. Равномерно непрерывные, липшицевы и изометрические отображения. Сохранение фундаментальности последовательностей при равномерно непрерывных отображениях. Инвариантность полноты при равномерных гомеоморфизмах.

6. Полнота произведения двух полных метрических пространств. Полнота конечномерных нормированных пространств.

7. Полнота пространств $\ell^\infty(X)$ и $C_b(X)$.

8. Теорема о вложенных замкнутых множествах. Теорема Бэра.

9. Принцип сжимающих отображений.

10. Теорема о продолжении равномерно непрерывных отображений с плотного подмножества.

11. Пополнение метрического пространства. Существование пополнения. Универсальное свойство пополнения. Единственность пополнения. Естественность пополнения.

12. Счетно компактные топологические пространства. Характеризация счетной компактности в терминах строгих предельных точек. Эквивалентность понятий предельной точки и строгой предельной точки для T_1-пространств.

13. Секвенциально компактные топологические пространства. Взаимосвязи компактности, счетной компактности и секвенциальной компактности: (1) в общем случае; (2) для пространств с 1-й аксиомой счетности; (3) для пространств со счетной базой.

14. Вполне ограниченные метрические пространства, их простейшие свойства, примеры и контрпримеры (ограниченность не влечет полную ограниченность). Полная ограниченность ограниченных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Характеризация полной ограниченности в терминах последовательностей.

15. Критерий компактности метрического пространства (компактность $\iff$ секвенциальная компактность $\iff$ счетная компактность $\iff$ полная ограниченность + полнота). Следствия из критерия компактности. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

16. Регулярные и нормальные топологические пространства. Характеризации регулярности и нормальности в терминах окрестностей. Регулярность локально компактных хаусдорфовых пространств. Нормальность компактных хаусдорфовых пространств и метризуемых пространств.

17. Лемма Урысона.

18. Теорема Титце-Урысона.

19. Гомотопия отображений. Согласованность гомотопии с композициями. Гомотопия относительно подмножества. Пример: линейная гомотопия отображений со значениями в выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^n$.

20. Гомотопия путей. Пример: замена параметра. Произведение путей и их гомотопических классов. Свойства операции умножения гомотопических классов путей. Фундаментальная группа.

21. Накрытия. Примеры накрытий. Число листов накрытия, его независимость от выбора точки базы (если последняя связна). Теорема о единственности поднятия.

22. Лемма о лебеговом числе.

23. Теорема о накрывающей гомотопии.

24. Теорема о накрывающей гомотопии (только формулировка). Следствия из нее: свойство поднятия путей, свойство поднятия гомотопий путей. Односвязные пространства. Отображение фундаментальной группы базы накрытия в слой над отмеченной точкой. Его биективность в случае односязности накрывающего пространства. Фундаментальная группа окружности.

25. Односвязность n-мерной сферы при $n \geqslant 2$. Фундаментальная группа вещественного проективного пространства.

26. Зависимость фундаментальной группы от отмеченной точки. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный непрерывным отображением пространств.