

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ
Вопросы к коллоквиуму 30.01.2018

1. Метрические пространства, нормированные пространства, евклидовы пространства. Примеры. Открытые множества в метрическом пространстве, их свойства. Открытость открытого шара.
2. Топологические пространства. Хаусдорфовость, метризуемость. Примеры топологических пространств. База и предбаза топологии, база и предбаза в точке; примеры. Необходимое и достаточное условие, при котором семейство множеств является базой некоторой топологии. Первая и вторая аксиомы счетности.
3. Сходимость последовательностей в топологическом пространстве. Описание сходящихся последовательностей в метрическом пространстве. Единственность предела последовательности в хаусдорфовом пространстве.
4. Замыкание множества в топологическом пространстве. Свойства операции замыкания. Описание замыкания через последовательности в пространствах с первой аксиомой счетности. Внутренность и граница множества, предельные и изолированные точки; примеры. Плотные множества и сепарабельные пространства.
5. Непрерывные отображения топологических пространств. Эквивалентность непрерывности и секвенциальной непрерывности для пространств с первой аксиомой счетности. Критерии непрерывности (в терминах прообразов открытых или замкнутых множеств, в терминах непрерывности в точке, в терминах операции замыкания). Гомеоморфизмы. Открытые и замкнутые отображения. Примеры гомеоморфизмов.
6. Индуцированная топология на подпространстве топологического пространства. Ее описание в метрическом случае. Характеристическое свойство индуцированной топологии и его следствия. Замкнутые подмножества и замыкание в индуцированной топологии.
7. Финальная топология, порожденная семейством отображений. Характеристическое свойство финальной топологии. Дизъюнктные объединения топологических пространств. Универсальное свойство дизъюнктного объединения.
8. Инициальная топология, порожденная семейством отображений. Характеристическое свойство инициальной топологии. Произведения топологических пространств. Универсальное свойство произведения.
9. База произведения конечного числа топологических пространств. Метризуемость конечного произведения метризуемых пространств. Произведение семейства непрерывных отображений. Непрерывность поточечных суммы и произведения непрерывных функций.
10. Связные топологические пространства. Примеры. Связность отрезка. Основные свойства связных пространств.
11. Линейно связные топологические пространства и их связность. Основные свойства линейно связных пространств. Примеры. Описание связных подмножеств прямой.

12. Связные и линейно связные компоненты, их свойства, примеры. Локально линейно связные пространства и свойства их компонент.
13. Компактные топологические пространства. Критерий компактности в терминах замкнутых множеств. Критерий компактности подпространства (в терминах покрытий множествами, открытыми в топологии объемлющего пространства). Компактность замкнутого куба в \mathbb{R}^n .
14. Основные свойства компактных топологических пространств (связь компактности подпространств и их замкнутости, свойства непрерывных отображений из компактного пространства). Критерий компактности подмножества в \mathbb{R}^n . Основное свойство функций на компактном пространстве со значениями в \mathbb{R} .
15. Теорема Александера о предбазе. Теорема Тихонова о компактности произведения.
16. Понятия мажорирования и эквивалентности норм на векторном пространстве. Критерий мажорирования одной нормы другой. Теорема об эквивалентности норм на конечномерном векторном пространстве.