Введение в топологию 2017/18
Задачи для семинара, список 9

1. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ — окружность и $n \neq 0$ — натуральное число. Покажите, что отображение $f \colon S^1 \to S^1$, заданное формулой $z \mapsto z^n$, является накрытием.

2. Пусть $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \colon z \neq 0\}$.

(а) Покажите, что отображение $f \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = z^2$, является накрытием.

(б) Покажите, что отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, заданное той же формулой, накрытием уже не является.

3. Отображение топологических пространств $f \colon Y \to X$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если для всякой $y \in Y$ существует такое открытое $U \ni y$, что $f(U) \subset X$ открыто и ограничение $f|_U \colon U \to f(U)$ является гомеоморфизмом.

а) Пусть непрерывное отображение $f \colon Y \to X$ замкнуто, сюръективно, является локальным гомеоморфизмом, и все слои f конечны. Покажите, что f — накрытие.

б) Покажите, что условие замкнутости f в пункте а) нельзя отбросить.

4. Постройте накрытие $f \colon S^1 \times [0;1] \to M$, где M — лист Мёбиуса.

5. Постройте накрытие $f \colon (S^1)^2 \to K$, где K — бутылка Клейна.

6. Докажите, что не существует непрерывного отображения $\log \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ (где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$), удовлетворяющего тождеству $e^{\log z} = z$ для всех $z \in \mathbb{C}^*$.

7. Докажите, что не существует непрерывного отображения $\sqrt{\ } \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющего тождеству $(\sqrt{z})^2 = z$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

8. Пусть $n \geq 2$, и пусть на каждой прямой $\ell \subset \mathbb{R}^n$, проходящей через начало координат, выбрана точка $v(\ell)$, непрерывно зависящая от ℓ (уточните, что это значит!). Докажите, что для некоторой прямой ℓ имеем $v(\ell) = 0$.

9. Доказать, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ при $n \neq 2$.

10. Доказать, что S^2 не гомеоморфно S^n при $n \neq 2$.