Введение в топологию 2017/18
Задачи для семинара, список 8

1. Пусть X — компактное метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — отображение, удовлетворяющее следующему условию:

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y), \quad \text{как только } x \neq y.$$

Докажите, что существует и единственно $a \in X$, для которого $f(a) = a$.

2. Останется ли верным утверждение задачи 1, если предполагать только, что X полно?

Напомним, что отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$ называется *замкнутым*, если для всякого замкнутого $F \subset X$ его образ $f(F) \subset Y$ также замкнут.

3. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Покажите, что следующие два условия эквивалентны.

(а) f замкнуто.

(б) Для всякой точки $y \in Y$ и всякого открытого $V \supset f^{-1}(y)$ существует такое открытое $U \ni y$, что $V \supset f^{-1}(U)$.

4. Пусть K — компактное топологическое пространство, Y — произвольное топологическое пространство. Покажите, что отображение проекции на второй множитель $\pi\colon K \times Y \to Y$ является замкнутым.

5. Существует ли такая последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (вещественных) непрерывных функций на отрезке $[0;1]$, что всякая вещественная непрерывная функция $\varphi\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ является линейной комбинацией конечного числа функций f_i? (*Указание*: теорема Бэра.)

6. Пусть $C[0;1]$ — пространство непрерывных функций на отрезке с нормой

$$\|f\| = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$$

и $B = \{f \in C[0;1] \colon \|f\| \leqslant 1\}$ (замкнутый единичный шар). Компактно ли B в индуцированной топологии?

7. Пусть X — пространство *финитных* числовых последовательностей (последовательность $\{a_n\}$ назвыается финитной, если $a_k = 0$ для всех k, больших некоторого числа N). Введем на X две нормы:

$$\|\{a_n\}\|_1 = \sum |a_j|, \quad \|\{a_n\}\|_\infty = \max |a_j|.$$

а) Эквивалентны ли эти нормы?

б) Выясните, полно ли пространство X в норме $\|\cdot\|_1$, и если нет, опишите его пополнение.

в) Тот же вопрос, что в б), про норму $\|\cdot\|_\infty$.

8. Пусть X — локально компактное (хаусдорфово) пространство, и пусть U — непустое открытое подмножество в X. Покажите, что U непредставимо в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств.

9. Пусть X — множество всех отрезков положительной длины. Расстоянием между двумя отрезками назовем меру их симметрической разности.

а) Проверить, что это метрическое пространство.

б) Выяснить, полное ли оно, и если нет, описать пополнение.

10. Пусть $F\colon [0;1] \times [0;1] \to [0;1]$ — непрерывная функция; для всякого $a \in [0;1]$ положим $F_a\colon x \mapsto F(a,x)$. Покажите, что $a \mapsto F_a$ — непрерывное отображение $[0;1] \to C[0;1]$.

11. а) Существует ли такая непрерывная функция $F\colon [0;1] \times [0;1] \to [0;1]$, что для всякой непрерывной $g\colon [0;1] \to [0;1]$ найдется такое $a \in [0;1]$, что $g(x) = F(a,x)$ для всех x?

б) Существует ли такая непрерывная функция $F\colon \mathbb{R} \times [0;1] \to [0;1]$, что для всякой непрерывной $g\colon [0;1] \to [0;1]$ найдется такое $a \in \mathbb{R}$, что $g(x) = F(a,x)$ для всех x? (*Указание*: теорема Бэра.)