Введение в топологию 2017/18
Задачи для семинара, список 7

1. Обозначим через ℓ^1 пространство абсолютно сходящихся рядов с вещественными членами; в качестве нормы ряда выберем сумму модулей его членов. Докажите, что в этой норме пространство ℓ^1 полно.

2. Обозначим через $C^1[0;1]$ пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0;1]$ (производная существует и непрерывна в том числе и на концах отрезка). В качестве нормы выберем

$$\|f\| = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0;1]} |f'(x)|.$$

Докажите, что $C^1[0;1]$ полно в этой норме. (*Указание.* Формула Ньютона–Лейбница.)

3. В пространстве $C^1[0;1]$ из задачи 2 введем норму $\|f\| = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$. Покажите, что в этой норме пространство неполно.

4. В пространстве $C[0;1]$ непрерывных функций на отрезке $[0;1]$ введем норму $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Покажите, что в этой норме пространство неполно.

5. Докажите, что если полное метрическое пространство не имеет изолированных точек, то оно несчетно.

6. Можно ли представить $\mathbb{R}$ в виде счетного объединения подмножеств, гомеоморфных канторову множеству?

7. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ — счетное подмножество. Докажите, что существует такая плоскость $\pi \subset \mathbb{R}^3$, что $S_\pi(X) \cap X = \varnothing$. (Через S_π обозначена симметрия относительно плоскости π.)

8. Докажите, что множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ не является пересечением счетного семейства открытых подмножеств в $\mathbb{R}$.