Введение в топологию 2017/18
Задачи для семинара, список 6

Напоминаем, что $\mathbb{RP}^n$ — фактор S^n по отношению $x \sim -x$.

1. Покажите, что $\mathbb{RP}^1$ гомеоморфно S^1, построив непрерывную биекцию $\mathbb{RP}^1 \to S^1$ между этими хаусдорфовыми компактами. (*Указание.* Умножение комплексных чисел.)

2. Пусть $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \sum x_i^2 \leqslant 1)\}$, $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \sum x_i^2 = 1)\}$. Введем на D^n следующее отношение эквивалентности R: если $x, y \in S^{n-1}$, то $x \sim y$ тогда и только когда, когда $x = \pm y$, а точки, не лежащие на S^{n-1}, эквивалентны только сами себе. Покажите, что D^n/R гомеоморфно $\mathbb{RP}^n$.

3. Рассмотрим на $\mathbb{R}$ следующее отношение эквивалентности. Если $|x| > 1$, то $x \sim -x$, остальные x эквивалентны только себе. Будет ли фактор по этому отношению хаусдорфовым?

Если группа G действует на топологическом пространстве X, то через X/G обозначается фактор X по отношению эквивалентности «точки эквивалентны, если они лежат в одной орбите».

4*. Обозначим через $\mathbb{CP}^n$ (комплексное проективное пространство) фактор $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ по следующему действию группы $\mathbb{C}^*$ (группа ненулевых комплексных чисел с операцией — умножением):

$$(\lambda, (z_0, \ldots, z_n)) \mapsto (\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n).$$

Покажите, что $\mathbb{CP}^n$ хаусдорфово и компактно. (*Указание.* Представьте $\mathbb{CP}^n$ в виде фактора некоторой сферы.)

5. Покажите, что $\mathbb{CP}^1$ гомеоморфно S^2.

6. Пусть $X = [0;1] \times [0;1] \subset \mathbb{R}^2$ — единичный квадрат. Обозначим через R отношение эквивалентности на X, для которого $(0,t) \sim (1, 1-t)$ и $(t, 0) \sim (1-t, 1)$ при всех $t \in [0;1]$, а остальные точки эквивалентны только сами себе.

Покажите, что X/R гомеоморфно $\mathbb{RP}^2$.

7. Пусть R — такое отношение эквивалентности на пространстве X, что X/R хаусдорфово. Всегда ли в этом случае каноническое отображение $X \to X/R$ открыто?

8. Пусть $X = [0;1] \times [0;1] \subset \mathbb{R}^2$ — единичный квадрат. Обозначим через R отношение эквивалентности на X, для которого $(0,t) \sim (1, 1-t)$ при всех $t \in [0;1]$, а остальные точки эквивалентны только сами себе.

(а) Покажите, что $Y = X/R$ — компактное хаусдорфово пространство (оно называется *листом Мёбиуса*).

(б) Покажите, что образ в Y подмножества $[0;1] \times \{0,1\}$ гомеоморфен окружности (этот образ называется *краем* листа Мёбиуса).

Если X_1, X_2 — топологические пространства, $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ и $f \colon Y_1 \to Y_2$ — непрерывное отображение, то результатом склеивания пространств X_1 и X_2 по отображению f называется фактор $(X_1 \sqcup X_2)/R$, где отношение R таково, что всякое $y \in Y_1 \subset X_1$ эквивалентно $f(y) \in Y_2 \subset X_2$, а все остальные точки в $X_1 \sqcup X_2$ эквивалентны только сами себе.

9. Пусть $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ — единичный круг в $\mathbb{R}^2$ (см. задачу 2) и $S^1 \subset D^2$ — его граница. Покажите, что в результате склеивания листа Мёбиуса и D^2 по гомеоморфизму между краем листа Мёбиуса и $S^1 \subset D^2$ получится $\mathbb{RP}^2$.

10. Пусть $X = [0;1] \times [0;1] \subset \mathbb{R}^2$ — единичный квадрат. Обозначим через R отношение эквивалентности на X, для которого $(0,t) \sim (1,t)$ и $(t,0) \sim (1-t,1)$ при всех $t \in [0;1]$, а остальные точки эквивалентны только сами себе.

(а) Покажите, что X/R — компактное хаусдорфово пространство (оно называется *бутылкой Клейна*).

(б) Покажите, что у каждой точки бутылки Клейна есть окрестность, гомеоморфная октрытому кругу на плоскости (это означает, что бутылка Клейна — *двумерное многообразие*).

(в) Покажите, что бутылку Клейна можно получить, склеивая два листа Мёбиуса по гомеоморфизму краев.