Введение в топологию 2017/18
Задачи для семинара, список 2

1. Покажите, что всевозможные множества вида $(a;+\infty)$ и $(-\infty;a)$, где $a \in \mathbb{Q}$, образуют предбазу стандартной топологии на $\mathbb{R}$.

2. Покажите, что всевозможные шары с рациональным радиусом и центром в точке, все координаты которой рациональны, образуют базу стандартной топологии на $\mathbb{R}^n$.

3. (а) Докажите, что замкнутый шар в метрическом пространстве является замкнутым множеством.

(б) Докажите, что в нормированном пространстве замыканием открытого шара является замкнутый шар с тем же центром и того же радиуса.

(в) Верно ли предыдущее утверждение в произвольном метрическом пространстве?

Отображение топологических пространств, переводящие замкнутые множества в замкнутые, называется *замкнутым.*

4. (а) Приведите пример замкнутого отображения, не являющегося непрерывным.

(б) Приведите пример непрерывного отображения, не являющегося замкнутым.

А если потребовать, чтоб оба пространства были хаусдорфовыми?

Отображение топологических пространств, переводящие открытые множества в открытые, называется *открытым.*

5. (а) Приведите пример открытого отображения, не являющегося непрерывным.

(б) Приведите пример непрерывного отображения, не являющегося открытым.

А если потребовать, чтоб оба пространства были хаусдорфовыми?

6. Приведите пример непрерывной биекции хаусдорфовых пространств, не являющейся гомеоморфизмом.

7. Пусть $C[0;1]$ — множество всех непрерывных функций на отрезке $[0;1]$ (с вещественными значениями). Для всяких $a \in [0;1]$, $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ положим

$$W(a,b,\varepsilon) = \{f \in C[0;1] \colon |f(a) - b| < \varepsilon\};$$

рассмотрим на $C[0;1]$ топологию, в которой всевозможные $W(a,b,\varepsilon)$ образуют предбазу.

(а) Покажите, что $\lim f_n = f$ в этой топологии тогда и только тогда, когда $\lim f_n(x) = f(x)$ (в обычной топологии) для всех $x \in [0;1]$.

(б) Является ли вышеописанная топология хаусдорфовой?

(в) Является ли она метризуемой?

8. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $Y \subset X$ называется *локально замкнутым*, если для всякой точки $y \in Y$ существует такая окрестность $U \ni y$, $U \subset X$, что $U \cap Y$ замкнуто в U (в индуцированной топологии). Покажите, что следующие условия равносильны.

(1) $Y \subset X$ локально замкнуто.

(2) Y — разность двух замкнутых множеств.

(3) Y — разность двух открытых множеств.

(4) Y — открытое подмножество своего замыкания $\overline{Y}$ (в индуцированной топологии).