Введение в топологию 2017/18
Задачи для семинара, список 1

1. Пусть $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(а) Докажите, что для всех $a, b \geqslant 0$ справедливо *неравенство Юнга*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

(указание: $\frac{a^p}{p} = \int_0^p x^{p-1}dx$; функции $x \mapsto x^{p-1}$ и $y \mapsto y^{q-1}$ обратны друг другу).

(б) Пусть $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Докажите *неравенство Гёльдера*:

$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q,$$

где $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$.

(в) Покажите, что *ℓ^p-метрика* на $\mathbb{R}^n$, заданная формулой $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p$, действительно является метрикой.

2. Перечислите все топологии на множестве из двух элементов.

3. Проверьте, что топология Зарисского на $\mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$ — как вам приятнее) действительно удовлетворяет всем аксиомам топологического пространства.

4. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Докажите, что если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

5. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Для любых $x, y \in X$ положим $\rho'(x, y) = \min(\rho(x, y), 1)$. Покажите, что ρ' — метрика, порождающая ту же самую топологию, что и метрика ρ.

6. Пусть p — простое число и $x \in \mathbb{Q}$, причем $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a, b, \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = (b, p) = 1$. Напомним, что по определению $\|x\|_p = p^{-n}$, $\|0\| = 0$ (это *p-адическая норма* числа x).

(а) Покажите, что $\mathbb{Q}$ с расстоянием $\rho(x, y) = \|x - y\|_p$ является метрическим пространством, удовлетворяющим *ультраметрическому неравенству*, более сильному, чем неравенство треугольника:

$$\rho(x, z) \leqslant \max(\rho(x, y), \rho(y, z)).$$

(б) Пусть (X, ρ) — метрическое пространство с метрикой, удовлетворяющей ультраметрическому неравенству. Покажите, что для любых трех точек $x, y, z \in X$ хотя бы два из трех чисел $\rho(x, y)$, $\rho(y, z)$ и $\rho(x, z)$ равны друг другу.

7. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $\mathcal{F}$ — множество его ограниченных непустых замкнутых подмножеств. Для $A, B \in \mathcal{F}$ положим

$$\rho_H(A, B) = \max\Big(\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \rho(y, x)\Big).$$

Покажите, что ρ_H — метрика на $\mathcal{F}$ (она называется *метрикой Хаусдорфа*).

8. Введем на отрезке $[0; 1]$ топологию, в которой открытые множества суть множества вида

$$D(f) = \{x\colon f(x) \neq 0\}$$

для всевозможных непрерывных функций f (аналог топологии Зарисского). Покажите, что эта топология совпадает со стандартной.