Все задачи этого листка приравниваются к бонусным. Это означает, что сдавать их необязательно, а сдавшие получат дополнительные баллы. Тем не менее, настоятельно рекомендуется порешать эти задачи для подготовки к экзамену. Некоторые из них будут обсуждаться на семинаре 15 мая.

7.1. Докажите, что каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{R}$ (соответственно, $K \subset \mathbb{T}$) является спектром некоторого самосопряженного (соответственно, унитарного) оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.

7.2*. Что можно сказать про спектр изометрии в гильбертовом пространстве?

7.3. Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$. Докажите, что **(a)** $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*T$; **(b)** если T нормален, то $\operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Ker} T$; **(c)** остаточный спектр нормального оператора пуст.

7.4. Пусть T — любой из следующих операторов:
(a) ортогональный проектор в гильбертовом пространстве;
(b) диагональный оператор M_λ в пространстве ℓ^2 (где $\lambda \in \ell^\infty,\ \lambda_n \in \mathbb{R}\ \forall n$);
(c) оператор умножения M_φ в пространстве $L^2(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой и $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — ограниченная измеримая функция).
Для произвольной непрерывной функции $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ задайте оператор $f(T)$ явной формулой.

7.5. Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и $f \in C(\sigma(T))$. Докажите, что оператор $f(T)$ компактен тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$.

7.6. (a)-(c) Для каждого оператора T из задачи 7.4 и произвольной ограниченной борелевской функции $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ задайте оператор $f(T)$ явной формулой.

7.7. Верны ли для борелевского исчисления теоремы **(a)** об отображении спектра и **(b)** о композиции?

7.8. Сформулируйте и докажите теоремы о непрерывном и борелевском исчислениях для унитарного оператора. (*Указание:* видоизмените доказательство теоремы о непрерывном исчислении для самосопряженного оператора, используя лорановские многочлены на окружности вместо многочленов на прямой.)

7.9. Докажите, что ограниченный линейный оператор U в гильбертовом пространстве унитарен **(a)** тогда и **(b)** только тогда, когда он имеет вид $U = \exp(iT)$ для некоторого самосопряженного оператора T.

7.10. Докажите, что группа $\mathrm{U}(H)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве H линейно связна.

7.11. Докажите, что компактный самосопряженный оператор является циклическим **(a)** тогда и **(b)** только тогда, когда все его собственные значения однократны.

7.12. Докажите, что оператор умножения $M_\varphi\colon L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ на строго монотонную функцию $\varphi \in C[a,b]$ является циклическим.

7.13. Оператор T в пространстве $L^2[0,1]$ действует по формуле $(Tf)(t) = \sqrt{t} f(t)$. Найдите в явном виде меру μ и унитарный изоморфизм $U\colon L^2[0,1] \to L^2([0,1],\mu)$, осуществляющий эквивалентность между T и M_t.

7.14. Пусть T — циклический самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Докажите, что оператор $S \in \mathscr{B}(H)$ коммутирует с T тогда и только тогда, когда $S = f(T)$ для некоторой ограниченной борелевской функции $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$.

7.15*. Пусть $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная борелевская функция. Докажите, что если оператор умножения $M_\varphi\colon L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ является циклическим, то существует множество $A \subset [a,b]$ лебеговой меры нуль, на дополнении к которому φ — инъекция[1].

7.16. (a) С помощью спектральной теоремы докажите, что ограниченный самосопряженный оператор P, удовлетворяющий условию $\sigma(P) \subseteq \{0,1\}$, является проектором.
(b) Докажите то же самое, не используя спектральную теорему.

7.17*. Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Докажите, что множество компактных операторов $\mathscr{K}(H)$ — это единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(H)$.

Указание. Пусть $I \subset \mathscr{B}(H)$ — замкнутый двусторонний идеал. Имитируя известное доказательство простоты алгебры матриц, докажите, что I содержит все одномерные операторы (а значит, содержит и $\mathscr{K}(H)$). Если I содержит хотя бы один некомпактный оператор, то воспользуйтесь спектральной теоремой.

[1] Обратное также верно, но опирается на довольно тонкие факты из теории меры. Кстати, пользуясь этим обратным утверждением, можно построить непрерывную немонотонную функцию $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, для которой оператор M_φ является циклическим.