6.1. Пусть X, Y — топологические векторные пространства. Докажите, что
(a) линейный оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен $\iff$ он непрерывен в нуле;
(b) множество $\mathscr{L}(X,Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y — векторное подпространство в пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X,Y)$ всех линейных операторов из X в Y.

6.2. На каких из следующих топологических векторных пространств существует хотя бы одна непрерывная норма?
(a) $\mathbb{K}^X$ (где X — множество); **(b)** $C(X)$ (где X — метризуемое топологическое пространство);
(c) пространство голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, снабженное топологией, унаследованной из $C(U)$;
(d) $C^\infty[a,b]$; **(e)** $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество; **(f)** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

6.3. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P, нормируемо тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему конечному подсемейству.

6.4. (a)-(f) Какие пространства из задачи 6.2 нормируемы?

6.5. Докажите, что хаусдорфово локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P, метризуемо тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему не более чем счетному подсемейству.

Указание. Если $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность полунорм, то функция

$$\rho(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \min\{p_n(x-y), 1\} \quad \text{или, если хотите,} \quad \rho(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

удовлетворяет неравенству треугольника.

6.6. (a)-(f) Какие пространства из задачи 6.2 метризуемы?

6.7-B. Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые два семейства полунорм, каждое из которых задает хаусдорфову топологию, эквивалентны.

6.8. Пусть X — множество. Докажите, что для любой функции $f \in \mathbb{K}^X$ оператор умножения $M_f\colon \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$, $M_f(g) = fg$, непрерывен.

6.9. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Докажите, что любой линейный дифференциальный оператор $\sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha D^\alpha$ в пространстве $C^\infty(U)$ (где $a_\alpha \in C^\infty(U)$) непрерывен.

6.10. Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Для $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Докажите, что топология компактной сходимости на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ порождается любым из следующих эквивалентных семейств полунорм:
(a) $\{\|\cdot\|_{r,\infty} : 0 < r < R\}$, где $\|f\|_{r,\infty} = \sup_{n\geqslant 0} |c_n(f)| r^n$.
(b)-B $\{\|\cdot\|_{r,p}^{\mathrm{int}} : 0 < r < R\}$, где $\|f\|_{r,p}^{\mathrm{int}} = \left(\int_{|z|=r} |f(z)|^p \, d\mu(z)\right)^{1/p}$, μ — мера длины на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ и $p \in [1, +\infty)$.

6.11-B. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Докажите, что топология компактной сходимости на $\mathscr{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.

6.12-B. Пространство *быстро убывающих последовательностей* $s(\mathbb{Z})$ определяется так:

$$s(\mathbb{Z}) = \Big\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \|x\|_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n||n|^k < \infty \ \forall k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \Big\}.$$

Топология на $s(\mathbb{Z})$ порождается последовательностью полунорм $\{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Снабдите пространство $C^\infty(\mathbb{T})$ топологией (по аналогии с $C^\infty[a,b]$) и постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{T}) \cong s(\mathbb{Z})$. (*Указание:* сопоставьте каждой функции из $C^\infty(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье.)

6.13. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара векторных пространств. Докажите, что
(a) $\dim X < \infty \iff \dim Y < \infty \iff$ слабая топология $\sigma(X,Y)$ нормируема;
(b) слабая топология $\sigma(X,Y)$ метризуема $\iff$ размерность Y не более чем счетна;
(c) слабая топология на бесконечномерном нормированном пространстве и слабая* топология на пространстве, сопряженном к бесконечномерному банахову пространству, неметризуемы.

6.14. Для нормированного пространства X обозначим через wk, wk* и norm соответственно слабую, слабую* и стандартную нормированную (т.е. порожденную операторной нормой) топологии на X^*.
(a) Докажите, что wk$^* \subset$ wk $\subset$ norm.
(b) Докажите, что wk* = wk $\iff$ X рефлексивно.

6.15. Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathbb{K}^X$ (где X — множество) и докажите, что слабая топология на пространстве $\mathbb{K}^X$ совпадает с исходной.

6.16. Пусть e_n — числовая последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных. Исследуйте последовательность (e_n) на слабую сходимость в пространствах c_0 и ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$.

6.17. Пусть T_ℓ и T_r — операторы левого и правого сдвига в ℓ^2. Исследуйте последовательности $(T_\ell^n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(T_r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ на сходимость **(a)** по норме в $\mathscr{B}(\ell^2)$; **(b)** в сильной операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$; **(c)** в слабой операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$.

6.18. Приведите пример разрывного линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП X и Y, который непрерывен относительно слабых топологий на X и Y.

6.19. (a) Приведите пример банахова пространства X и векторного подпространства $Y \subset X^*$, которое замкнуто по норме, но не замкнуто в слабой* топологии.
(b) Докажите, что если X нерефлексивно, то такое Y, как в п. (a), обязательно существует.

6.20-B. Докажите, что в пространстве ℓ^1 всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.

6.21-B. Пусть (X,μ) — пространство с конечной мерой, $L^0(X,\mu)$ — векторное пространство классов эквивлентности измеримых функций на X (функции считаются эквивалентными, если они равны μ-почти всюду). Для $f, g \in L^0(X,\mu)$ положим

$$\rho(f,g) = \int_X \min\{|f-g|, 1\}\, d\mu.$$

Докажите, что
(a) ρ — метрика, превращающая $L^0(X,\mu)$ в топологическое векторное пространство;
(b) последовательность измеримых функций сходится в $L^0(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда она сходится по мере;
(c) $(L^0[0,1])^* = 0$.