4.1. Пусть X — нормированное пространство, $f \in X^* \setminus \{0\}$ и $X_0 = \operatorname{Ker} f$. Докажите, что в X существует 0-перпендикуляр к X_0 тогда и только тогда, когда f достигает нормы (т.е. существует такой $x \in X$, $\|x\| = 1$, что $|f(x)| = \|f\|$). Приведите пример, показывающий, что это не всегда так.

4.2. Докажите, что подмножество $S \subset \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\sup_{x \in S} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

(т.е. нормы «хвостов» последовательностей из S равномерно стремятся к нулю).

4.3. Докажите, что подмножество $S \subset c_0$ относительно компактно тогда и только тогда, когда существует такой элемент $y \in c_0$, что $|x_n| \leqslant |y_n|$ для всех $x \in S$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Верно ли аналогичное утверждение для ℓ^p?

4.4. Компактны ли операторы правого и левого сдвига в ℓ^p и c_0?

4.5. Может ли образ компактного оператора между банаховыми пространствами содержать бесконечномерное замкнутое подпространство?

4.6. Докажите компактность оператора вложения $C^1[a,b] \to C[a,b]$.

4.7. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для компактности M_f.

4.8. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, $f \colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для компактности M_f.

4.9. Для интегрируемой функции f на $[0,1]$ определим функцию Tf формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Является ли T компактным оператором **(a)** из $C[0,1]$ в $C[0,1]$? **(b)** из $L^p[0,1]$ в $C[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)? **(c)** из $L^p[0,1]$ в $L^p[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)? **(d)** из $L^1[0,1]$ в $C[0,1]$? **(e)-В** из $L^1[0,1]$ в $L^1[0,1]$?

4.10. Пусть $I = [a,b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Докажите компактность *интегрального оператора* $T \colon C(I) \to C(I)$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy.$$

4.11. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Докажите компактность *интегрального оператора Гильберта–Шмидта* $T \colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$,

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\,d\mu(y).$$

Указание: докажите, что линейная оболочка множества функций вида $K(x,y) = f(x)g(y)$, где $f, g \in L^2(X,\mu)$, плотна в $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и воспользуйтесь тем, что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$ (см. прошлый семестр).

4.12. (a) Пусть X — метризуемый компакт, $K \in C(X \times X)$, μ — конечная борелевская мера на X. Докажите, что образ интегрального оператора Гильберта–Шмидта $T_K\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ содержится в $C(X)$, и что T_K является компактным оператором из $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$.
(b)-B Докажите то же, что в п. (a), для произвольного (не обязательно метризуемого) компакта X в предположении регулярности μ.

4.13. Докажите, что пространство ℓ^p при $1 \leqslant p < \infty$ обладает свойством аппроксимации (это означает, что для каждого банахова пространства X всякий компактный оператор $T\colon X \to \ell^p$ аппроксимируется по операторной норме операторами конечного ранга).

4.14. Пусть X — банахово пространство.
(a) Для $x \in X$ и $f \in X^*$ определим оператор $x \otimes f \in \mathscr{B}(X)$ формулой $(x \otimes f)(y) = f(y)x$. Представьте операторы $T(x \otimes f)$, $(x \otimes f)T$ (где $T \in \mathscr{B}(X)$) и $(x_1 \otimes f_1)(x_2 \otimes f_2)$ в виде $y \otimes g$ для некоторых $y \in X$ и $g \in X^*$.
(b) Пусть $0 \neq I \subseteq \mathscr{B}(X)$ — двусторонний идеал. Докажите, что $I \supseteq \mathscr{F}(X)$, где $\mathscr{F}(X)$ — идеал операторов конечного ранга. Как следствие, всякий ненулевой замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$ (где H — гильбертово пространство) содержит $\mathscr{K}(H)$. (*Замечание:* если H сепарабельно и бесконечномерно, то $\mathscr{K}(H)$ — единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(H)$. Если позволит время, то мы сможем это доказать в конце семестра.)

4.15. Вычислите норму оператора $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ из задачи 4.9. (*Указание:* оператор T^*T компактен и самосопряжен.)

4.16. Докажите, что s-числа интегрального оператора Гильберта–Шмидта в $L^2(X,\mu)$ удовлетворяют условию $\sum_n s_n^2 < \infty$.