

**3.1.** Для каждой из следующих алгебр  $A$  дайте критерий обратимости ее элемента и найдите спектр каждого ее элемента: (а)  $A = \mathbb{C}[t]$ ; (б)  $A = \mathbb{C}[[t]]$ ; (с)  $A = \mathbb{C}(t)$ .

**3.2.** Пусть  $(X, \mu)$  — пространство с мерой,  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  — измеримая функция. Напомним (см. лекцию), что число  $\lambda \in \mathbb{C}$  называется *существенным значением*  $f$ , если  $\mu(f^{-1}(U)) > 0$  для любой окрестности  $U \ni \lambda$ . Также напомним (см. лекцию), что если  $f$  существенно ограничена, то ее спектр как элемента алгебры  $L^\infty(X, \mu)$  равен множеству всех ее существенных значений.

(а) Приведите пример, показывающий, что значение  $f$  не обязано быть ее существенным значением.

(б) Приведите пример, показывающий, что существенное значение  $f$  не обязано быть ее значением.

(с) Докажите, что если  $X = [a, b]$  — отрезок с мерой Лебега, а  $f$  непрерывна, то множество ее значений совпадает с множеством ее существенных значений.

**3.3.** Пусть  $A$  — унитарная алгебра,  $a, b \in A$ .

(а) Докажите, что элемент  $1 - ab$  обратим тогда и только тогда, когда элемент  $1 - ba$  обратим. (*Указание.* Можно сначала угадать формулу, выражающую  $(1 - ba)^{-1}$  через  $(1 - ab)^{-1}$ , а потом проверить, что она верна. А чтобы ее угадать, можно предположить, что  $A = \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$  и  $|b| < 1$ , и забыть о коммутативности умножения в  $\mathbb{C}$ .)

(б) Докажите, что  $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$ .

(с) Докажите, что если  $a$  или  $b$  обратим, то  $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ .

(д) Приведите пример, показывающий, что в общем случае  $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$ .

**3.4.** Пусть  $A$  — ненулевая унитарная алгебра. Найдите спектр любого ее (а) нильпотентного элемента; (б) идемпотентного элемента, отличного от 0 и 1.

**3.5-В** (*банахова лемма Шура*). Пусть дано неприводимое представление группы  $G$  в банаховом пространстве  $X$  ограниченными операторами.

(а) Докажите, что любой морфизм  $G$ -модулей  $\varphi: X \rightarrow X$  имеет вид  $\varphi = \lambda \mathbf{1}_X$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

(б) Верно ли утверждение (а), если  $X$  — неполное нормированное пространство?

**3.6.** Верно ли, что  $r(a) = \|a\|$  для любого  $a \in A$ , если (а)  $A = L^\infty(X, \mu)$ ? (б)  $A = C^n[a, b]$ ? (Напомним, что  $C^n[a, b]$  — банахова алгебра относительно нормы  $\|f\| = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\infty / k!$ ).

**3.7** (*оператор взвешенного сдвига*). Пусть  $H = \ell^2$  и  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ . Оператор

$$T_\alpha: H \rightarrow H, \quad T_\alpha(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$$

называется *оператором взвешенного сдвига*. (*Реклама:* такие операторы изучаются давно, но особую популярность приобрели в 90-х гг. прошлого века ввиду их важности для теории представлений компактных квантовых групп.) Вычислите  $\|T_\alpha\|$ , вычислите  $r(T_\alpha)$  и приведите пример последовательности  $\alpha$ , для которой оператор  $T_\alpha$  квазинильпотентен, но не нильпотентен.

**3.8** (*оператор Вольтерра*). Пусть  $I = [a, b]$ ,  $H = L^2(I)$  и  $K \in L^2(I \times I)$ . Оператор Вольтерра  $V_K: L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  задается формулой

$$(V_K f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y) dy$$

(*Реклама:* операторы Вольтерра образуют один из наиболее классических и давно изучаемых классов линейных операторов; они играют важную роль в теории интегральных уравнений, описывающих различные физические процессы.)

(а) Докажите, что если функция  $K$  ограничена, то  $V_K$  квазинильпотентен.

(б)-В Докажите, что  $V_K$  квазинильпотентен для любой  $K \in L^2(I \times I)$ .

**3.9.** Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры диагонального оператора в  $\ell^\infty$ .

**3.10.** Пусть  $(X, \mu)$  — пространство с  $\sigma$ -конечной мерой,  $f$  — существенно ограниченная измеримая функция на  $X$  и  $M_f$  — оператор умножения на  $f$ , действующий в  $L^p(X, \mu)$  (где  $1 \leq p \leq \infty$ ). Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора  $M_f$ .

**3.11.** Найдите спектр оператора  $T: L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ , действующего по формуле

$$(Tf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t-s)f(s) ds.$$

**3.12.** Найдите спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр операторов правого и левого сдвига, действующих в пространстве  $c_0$ .

**3.13.** Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства  $\ell^1$ .

**3.14.** Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства  $\ell^\infty$ .

**3.15.** Для фиксированного  $\zeta \in \mathbb{T}$  определим оператор сдвига  $T_\zeta: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$  формулой  $(T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1}z)$ . Найдите его спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр.

**3.16-В.** Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространств  $L^p(\mathbb{T})$  и  $C(\mathbb{T})$ .

**3.17.** Докажите, что спектр биективной изометрии в банаховом пространстве содержится в  $\mathbb{T}$ .

**3.18. (а)** Докажите, что в унитарной банаховой алгебре  $A \neq 0$  не может существовать таких элементов  $a, b$ , что  $[a, b] = ab - ba = 1$ .

**(б)** Докажите, что алгебра дифференциальных операторов вида  $\sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$ , где  $a_k \in \mathbb{C}[x]$  (она называется *алгеброй Вейля*) не имеет представлений ограниченными операторами в ненулевых банаховых пространствах.

**3.19-В.** Пусть  $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Алгебраическим *квантовым тором* называется алгебра  $A_q$  с двумя обратимыми образующими  $u, v$  и соотношением  $uv = qvu$ . (*Реклама:* эта алгебра играет важную роль в некоммутативной геометрии. Соотношения  $uv = qvu$  тесно связаны с *каноническими коммутационными соотношениями* Г. Вейля в квантовой механике.)

**(а)** Докажите, что если  $|q| \neq 1$ , то  $A_q$  не имеет представлений ограниченными операторами в ненулевых банаховых пространствах.

**(б)** Пусть  $|q| = 1$ . Постройте унитарные операторы  $U, V$  в пространстве  $L^2(\mathbb{T})$ , удовлетворяющие соотношению  $UV = qVU$  (они дают, таким образом, представление  $A_q$  в  $L^2(\mathbb{T})$ ). *Подсказка:* см. задачи 3.10 и 3.15.

**(с)** Пусть  $|q| = 1$ ,  $U$  и  $V$  — биективные изометрические линейные операторы в банаховом пространстве, удовлетворяющие соотношению  $UV = qVU$ . Найдите их спектры при условии, что  $q$  не является корнем из единицы.

**3.20-В.** Пусть  $A$  — унитарная банахова алгебра и  $B \subset A$  — подалгебра, содержащая  $1_A$ . Докажите, что

**(а)**  $B^\times$  — открыто-замкнутое подмножество в  $B \cap A^\times$ ;

**(б)** для каждого  $b \in B$  спектр  $\sigma_B(b)$  является объединением спектра  $\sigma_A(b)$  и некоторого семейства ограниченных связных компонент множества  $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ . (Неформально это означает, что  $\sigma_B(b)$  получается из  $\sigma_A(b)$  заклеиванием нескольких дыр.)