2.1. Пусть X и Y — банаховы пространства и $S \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$. Обязательно ли существует такой оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, что $S = T^*$?

2.2. Отождествим $(\ell^1)^*$ с ℓ^∞ (см. прошлый семестр) и рассмотрим пространство c_0 как подмножество в $(\ell^1)^*$. Найдите ${}^\perp c_0$ и $({}^\perp c_0)^\perp$. (*Мораль:* если X — нерефлексивное банахово пространство, то для замкнутого подпространства $N \subset X^*$ равенство $N = ({}^\perp N)^\perp$ может нарушаться; для рефлексивного же X оно верно всегда — см. лекцию.)

2.3. Пусть X — нерефлексивное банахово пространство. Покажите, что в X^* существует замкнутое векторное подпространство N, для которого $N \neq ({}^\perp N)^\perp$. (*Мораль:* ситуация, описанная в предыдущей задаче, — закономерность, а не патология.)

2.4. Придумайте пример инъективного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ между банаховыми пространствами X и Y, такого, что $\operatorname{Im} T^*$ не плотен в X^*. (*Указание:* X обязано быть нерефлексивным — см. лекцию. *Мораль:* для нерефлексивных пространств равенство $\overline{\operatorname{Im}(T^*)} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ может не выполняться.)

2.5. Пусть X и Y — нормированные пространства, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$
(a) Верно ли, что если T сюръективен, то T^* топологически инъективен? Верно ли обратное?
(b) Верно ли, что если $\operatorname{Im} T$ замкнут в Y, то $\operatorname{Im} T^*$ замкнут в X^*? Верно ли обратное?
(Для банаховых пространств ответ на эти вопросы положителен — см. лекцию.)
(c)-B Придумайте условие на T, необходимое и достаточное для того, чтобы T^* был топологически инъективным.

2.6. (a) Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что множество сюръективных ограниченных линейных операторов из X на Y открыто в $\mathscr{B}(X, Y)$.
(b) Сохраняет ли силу п. (a) для неполных нормированных пространств?

Лемма Джонсона (см. лекцию). Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) последовательность $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ точна и $\operatorname{Im} T$ замкнут;

(2) последовательность $Z^* \xrightarrow{T^*} Y^* \xrightarrow{S^*} X^*$ точна и $\operatorname{Im} S^*$ замкнут.

Как следствие, цепной комплекс банаховых пространств точен тогда и только тогда, когда точен его двойственный комплекс.

2.7. Уберем из пп. (1) и (2) леммы Джонсона требования замкнутости образов. Сохраняет ли силу какая-либо из импликаций (1) $\Longrightarrow$ (2) и (2) $\Longrightarrow$ (1)?

2.8-B (*лемма Серра*). Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Предположим, что операторы S и T имеют замкнутые образы. Постройте изометрический изоморфизм $(\operatorname{Ker} T / \operatorname{Im} S)^* \cong \operatorname{Ker} S^* / \operatorname{Im} T^*$.

Как следствие, если C — цепной комплекс банаховых пространств, в котором все отображения $C_{n+1} \to C_n$ имеют замкнутые образы, то $H^n(C^*) \cong H_n(C)^*$.

2.9. Пусть X — банахово пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Докажите, что X рефлексивно тогда и только тогда, когда X_0 и X/X_0 рефлексивны.

2.10-B. Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.
Указание. Можно действовать следующим образом:
1) Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).
2) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.
3) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.