Задачи в листках, помеченные буквой “В”, являются бонусными. За их решение будут начисляться дополнительные баллы.

**1.1.** Пусть $X, Y$ — нормированные пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор.
**(a)** Докажите, что если $T$ отображает замкнутый единичный шар пространства $X$ на замкнутый единичный шар пространства $Y$, то $T$ — коизометрия.
**(b)** Верно ли обратное утверждение?

**1.2.** Пусть $\alpha \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или $c_0$. Обозначим через $M_\alpha$ *диагональный оператор* в $X$, действующий по правилу $M_\alpha(x) = (\alpha_i x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Найдите условие на $\alpha$, необходимое и достаточное для того, чтобы $M_\alpha$ был **(a)** топологически инъективен; **(b)** открыт; **(c)** изометричен; **(d)** коизометричен.

**1.3.** Пусть $(\Omega, \mu)$ — пространство с $\sigma$-конечной мерой, и пусть $f$ — измеримая ограниченная функция на $\Omega$. Ответьте на вопросы **(a)** – **(d)** предыдущей задачи для *оператора умножения* $M_f$ в пространстве $L^p(\Omega, \mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), действующего по правилу $g \mapsto fg$.

**1.4.** Пусть $X$ — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Докажите, что
**(a)** факторполунорма на $X/X_0$ действительно является полунормой;
**(b)** топология на $X/X_0$, порожденная факторполунормой, является фактортопологией топологии на $X$ (т.е. множество $U \subset X/X_0$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз при факторотображении $Q\colon X \to X/X_0$ открыт в $X$).

**1.5.** Пусть $X$ — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Предположим, что $Z$ — нормированное постранство, $Q'\colon X \to Z$ — ограниченный линейный оператор, причем $Q'(X_0) = 0$, и пара $(Z, Q')$ обладает тем же универсальным свойством, что и факторпространство $(X/X_0, Q)$ (см. лекцию). Докажите, что существует единственный изометрический изоморфизм $I\colon Z \to X/X_0$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "Q'"'] \arrow[dr, "Q"] & \\ Z \arrow[rr, dashed, "I"] & & X/X_0 \end{tikzcd}$$

**Определение 1.1.** Пусть $X$ — нормированное пространство. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n$ векторов из $X$ *абсолютно сходится*, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$.

**1.6.** Докажите, что нормированное пространство полно тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится. (Этот факт был использован на лекции при доказательстве полноты факторпространств.)

**1.7.** Пусть $(\Omega, \mu)$ — пространство с мерой и $B(\Omega)$ — пространство ограниченных измеримых функций на $\Omega$, снабженное sup-нормой. Постройте изометрический изоморфизм между пространством $L^\infty(\Omega, \mu)$ и некоторым факторпространством пространства $B(\Omega)$. Выведите отсюда полноту пространства $L^\infty(\Omega, \mu)$.

**1.8.** Постройте **(a)** топологический изоморфизм между $c_0$ и некоторым факторпространством пространства $C[0, 1]$; **(b)** изометрический изоморфизм между $\ell^1$ и некоторым факторпространством пространства $L^1[0, 1]$.

**1.9.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — замкнутое векторное подпространство. Покажите, что ограничение факторотображения $Q\colon H \to H/H_0$ на ортогональное дополнение $H_0^\perp$ является изометрическим изоморфизмом $H_0^\perp$ на $H/H_0$. Как следствие, $H/H_0$ наделяется структурой гильбертова пространства.

Если $S$ — множество, то через $\ell^1(S)$ обозначается пространство всех функций $f\colon S \to \mathbb{K}$, удовлетворяющих условию $\|f\|_1 = \sum_{s\in S} |f(s)| < \infty$. (Здесь под суммой $\sum_{s\in S}$ понимается супремум сумм по всевозможным конечным подмножествам $S$; если $S = \mathbb{N}$, то это то же самое, что сумма ряда в обычном смысле.)

**1.10. (a)** Докажите, что любое банахово пространство $X$ изометрически изоморфно факторпространству пространства $\ell^1(S)$ для некоторого множества $S$.
**(b)-B** Докажите, что сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно факторпространству пространства $\ell^1$.

**1.11** (*необходимость полноты в теореме Банаха–Штейнгауза*)**.** Приведите пример нормированного пространства $X$ и последовательности $(f_n)$ в $X^*$, ограниченной на каждом векторе (т.е. такой, что для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))$ ограничена), но не ограниченной по норме.

**1.12.** Пусть $X, Y, Z$ — нормированные пространства.
**(a)** Докажите, что билинейный оператор $T\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда существует такое $C \geqslant 0$, что $\|T(x,y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X,\ y \in Y$.
**(b)** Предположим, что $X$ либо $Y$ полно. Докажите, что любой раздельно непрерывный билинейный оператор $X \times Y \to Z$ непрерывен. (Раздельная непрерывность здесь означает, что для любых $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ отображения $Y \to Z$, $y \mapsto T(x_0, y)$, и $X \to Z$, $x \mapsto T(x, y_0)$, непрерывны. *Указание:* воспользуйтесь теоремой Банаха–Штейнгауза).
**(c)** Верно ли утверждение из п. (b) без предположения о полноте?

**1.13-B.** Пусть $G$ — компактная топологическая группа и $\pi$ — ее представление в банаховом пространстве $X$, непрерывное в том смысле, что отображение $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto \pi(g)x$, непрерывно. Докажите, что на $X$ существует эквивалентная норма, относительно которой все операторы $\pi(g)$ изометричны. (*Предупреждение:* мера Хаара тут ни при чем!).

**1.14. (a)** Выведите теорему об обратном операторе из теоремы о замкнутом графике.
**(c)-B** Выведите теорему Банаха–Штейнгауза из теоремы о замкнутом графике.

**1.15** (*необходимость полноты в теореме Банаха об обратном операторе*)**. (a)** Приведите пример банахова пространства $X$, нормированного пространства $Y$ и биективного ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$, обратный к которому неограничен.
**(b)-B** Приведите пример нормированного пространства $X$, банахова пространства $Y$ и биективного ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$, обратный к которому неограничен.

**1.16.** Предположим, что пространство $L^1(\mathbb{R})$ полно относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, причем из сходимости $f_n \to f$ по этой норме следует, что $\int_{-\infty}^t f_n(s)\,ds \to \int_{-\infty}^t f(s)\,ds$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Докажите, что норма $\|\cdot\|$ эквивалентна обычной норме на $L^1(\mathbb{R})$.

**1.17-B.** Для рефлексивных пространств выведите теорему Банаха об обратном операторе из теоремы Банаха–Штейнгауза.

*Указание.* Чтобы доказать, что биективный оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ является топологическим изоморфизмом, достаточно проверить ограниченность прообраза единичного шара при отображении $T^*$.