

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ – 2

### Вопросы к экзамену 29.05.2018

1. Топологически инъективные операторы, открытые операторы, изометрии, коизометрии между нормированными пространствами. Критерии топологической инъективности и открытости оператора.
2. Факторпространства нормированных пространств. Универсальное свойство факторпространств и его следствия. Полнота факторпространств.
3. Свойство бочечности банаховых пространств. Теорема Банаха–Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) и ее следствия.
4. Теоремы Банаха об открытом отображении, об обратном операторе и о замкнутом графике.
5. Топологические прямые суммы и дополняемые подпространства нормированных пространств. Критерии дополняемости в терминах проекторов и в терминах факторпространств. Дополняемость конечномерных подпространств и замкнутых подпространств конечной коразмерности.
6. Пространство, сопряженное (двойственное) к нормированному пространству. Сопряженный (двойственный) оператор. Свойства операции перехода к двойственному оператору. Пример: оператор, двойственный к диагональному оператору в  $\ell^p$ .
7. Аннулятор подмножества в нормированном пространстве. Преданнулятор подмножества в двойственном пространстве. Простейшие свойства аннуляторов и преданнуляторов. Совпадение преданнулятора аннулятора подмножества с замыканием его линейной оболочки. Описание двойственных к подпространствам и к факторпространствам.
8. Двойственность между инъективными операторами в нормированных пространствах и операторами с плотным образом. Двойственность между топологически инъективными и сюръективными операторами. Теорема о замкнутом образе (эквивалентность замкнутости образа оператора и образа его двойственного). Лемма Джонсона о точных последовательностях банаховых пространств.
9. Спектр элемента алгебры. Спектры элементов алгебр  $\mathbb{C}^X$ ,  $\ell^\infty(X)$ ,  $L^\infty(X, \mu)$ . Поведение спектра при гомоморфизмах. Спектрально инвариантные подалгебры.
10. Теорема об отображении спектра для многочленов. Спектр обратного элемента.
11. Банаховы алгебры; примеры. Свойства группы обратимых элементов банаховой алгебры. Автоматическая непрерывность гомоморфизмов в  $\mathbb{C}$ . Компактность спектра элемента банаховой алгебры.
12. Резольвентная функция и ее свойства. Непустота спектра элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда–Мазура.
13. Спектральный радиус. Формула Бёрлинга–Гельфанда.

14. Описание спектра оператора умножения на функцию в  $L^p(X, \mu)$  и спектра оператора сдвига в  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .
15. Части спектра линейного оператора (точечный, непрерывный и остаточный спектры). Описание частей спектра диагонального оператора.
16. Спектр двойственного оператора. Включения между частями спектра оператора и частями спектра его двойственного. Описание частей спектра для операторов левого и правого сдвига в  $\ell^p$  (рефлексивный случай).
17. Вполне ограниченные метрические пространства. Их простейшие свойства, примеры и контрпримеры. Критерий полной ограниченности в терминах последовательностей.
18. Критерий компактности метрического пространства (компактность  $\iff$  секвенциальная компактность  $\iff$  существование предельных точек у бесконечных подмножеств  $\iff$  полная ограниченность & полнота). Следствия: критерий полной ограниченности в терминах пополнения; теорема Кантора.
19. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Некомпактность сферы в бесконечномерном нормированном пространстве.
20. Теорема Арцела–Асколи.
21. Компактные операторы: определение, простейшие примеры и контрпримеры. Свойства множества компактных операторов (замкнутое векторное подпространство в  $\mathcal{B}(X, Y)$ ; компактность произведения компактного и ограниченного операторов).
22. Теорема Шаудера о компактности двойственного оператора.
23. Аппроксимируемость компактных операторов в гильбертовом пространстве операторами конечного ранга. Критерий компактности диагонального оператора.
24. Фредгольмовы операторы. Простейшие примеры. Замкнутость образа фредгольмова оператора (лемма Като).
25. Фредгольмов индекс. Фредгольмовость и индекс двойственного оператора. Аддитивность индекса.
26. Подъем и спуск линейного оператора; их свойства. Теорема Рисса об операторах вида “ $1 +$  компактный”. Альтернатива Фредгольма.
27. Свойства спектра компактного оператора в банаховом пространстве.
28. Оператор, сопряженный к оператору между гильбертовыми пространствами. Основные свойства операции перехода к сопряженному оператору.  $C^*$ -тождество. Связь между инвариантными подпространствами оператора и его сопряженного.
29. Самосопряженные и нормальные операторы. Вещественность спектра самосопряженного оператора. Совпадение нормы нормального оператора с его спектральным радиусом.
30. Теорема Гильберта–Шмидта о компактных самосопряженных операторах в гильбертовом пространстве.
31. Теорема Шмидта о компактных операторах в гильбертовом пространстве.

32. Критерий фредгольмовости Никольского–Аткинсона. Алгебра Калкина. Существенный спектр, его компактность и непустота.
33. Открытость множества фредгольмовых операторов и локальная постоянность индекса.
34. Сохранение фредгольмовости и индекса при компактных возмущениях. Теорема Никольского о фредгольмовых операторах индекса 0.
35. Операторы Тёплица и геометрическая интерпретация их индекса.
36. Топологические векторные пространства. Топология, порожденная семейством полунорм. Непрерывность алгебраических операций, описание сходящихся последовательностей, критерий хаусдорфовости такой топологии. Локально выпуклые пространства и их «полинормируемость» (без доказательства). Примеры (пространства непрерывных и гладких функций, пространство Шварца, сильная и слабая операторные топологии).
37. Критерий непрерывности полунормы на локально выпуклом пространстве. Критерий непрерывности линейного оператора в терминах полунорм. Критерий мажорирования одного семейства полунорм другим. Наличие достаточного количества непрерывных линейных функционалов на хаусдорфовом локально выпуклом пространстве.
38. Дуальные пары и слабые топологии. Описание линейных функционалов, непрерывных в слабой топологии. Двойственные операторы между пространствами дуальных пар. Критерий существования двойственного оператора. Эквивалентность непрерывности и слабой непрерывности оператора между нормированными пространствами.
39. Аннуляторы подмножеств в дуальных парах, их свойства. Теорема о двойном аннуляторе и ее следствия.
40. Равностепенная непрерывность семейств линейных отображений между топологическими векторными пространствами. Теорема Банаха–Алаоглу–Бурбаки.