5.21-В. Пусть X — векторное пространство, $(X_i)_{i\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств и $(\varphi_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ — семейство линейных отображений. Обозначим через P_{ind} семейство всех полунорм на X, обладающих тем свойством, что для каждого $i \in I$ полунорма $p \circ \varphi_i$ на X_i непрерывна. Локально выпуклая топология $\tau(P_{\mathrm{ind}})$ на X, порожденная семейством P_{ind}, называется *индуктивной локально выпуклой топологией*, порожденной семейством (φ_i).
(a) Докажите, что $\tau(P_{\mathrm{ind}})$ — сильнейшая локально выпуклая топология на X, в которой все отображения φ_i непрерывны.
(b) Докажите, что линейное отображение $\varphi\colon X \to Y$ (где Y — произвольное локально выпуклое пространство) непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения $\varphi \circ \varphi_i\colon X_i \to Y$ непрерывны.

5.22-В. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $C_c^\infty(U)$ — пространство гладких функций на U с компактным носителем. Для каждого компакта $K \subset U$ положим $C_K^\infty(U) = \{f \in C^\infty(U) : \operatorname{supp} f \subset K\}$ и снабдим $C_K^\infty(U)$ топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$. По определению, *стандартная топология* на $C_c^\infty(U)$ — это индуктивная локально выпуклая топология, порожденная вложениями $C_K^\infty(U) \hookrightarrow C^\infty(U)$ для всевозможных компактов $K \subset U$.
(a) Докажите, что $C_c^\infty(U)$ хаусдорфово.
(b) Докажите, что последовательность (f_i) сходится к функции f в $C_c^\infty(U)$ тогда и только тогда, когда носители всех f_i и f содержатся в общем компакте $K \subset U$, и для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ последовательность частных производных $(D^\alpha f_i)$ сходится к $D^\alpha f$ равномерно на K.
(c) Докажите, что $C_c^\infty(U)$ неметризуемо.
(d) Докажите, что линейный оператор из $C_c^\infty(U)$ в произвольное локально выпуклое пространство непрерывен тогда и только тогда, когда он секвенциально непрерывен.