6.1. Докажите, что каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{R}$ (соответственно, $K \subset \mathbb{T}$) является спектром некоторого самосопряженного (соответственно, унитарного) оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.

6.2-B. Что можно сказать про спектр изометрии в гильбертовом пространстве?

6.3. Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$. Докажите, что **(a)** $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*T$; **(b)** если T нормален, то $\operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Ker} T$; **(c)** остаточный спектр нормального оператора пуст.

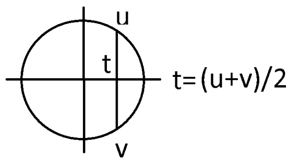
6.4. Пусть T — любой из следующих операторов:
(a) ортогональный проектор в гильбертовом пространстве;
(b) диагональный оператор M_λ в пространстве ℓ^2 (где $\lambda \in \ell^\infty,\ \lambda_n \in \mathbb{R}\ \forall n$);
(c) оператор умножения M_φ в пространстве $L^2(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой и $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — ограниченная измеримая функция).
Для произвольной непрерывной функции $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ задайте оператор $f(T)$ явной формулой.

6.5. Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и $f \in C(\sigma(T))$. Докажите, что оператор $f(T)$ компактен тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$.

6.6. Пусть P_1, P_2 — ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве H. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
(1) $P_1 \leqslant P_2$; **(2)** $\|P_1 x\| \leqslant \|P_2 x\|$ для всех $x \in H$; **(3)** $P_1P_2 = P_1$; **(4)** $P_2P_1 = P_1$; **(5)** $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$; **(6)** $P_2 - P_1$ — ортогональный проектор; **(7)** $\operatorname{Im} P_1 \subset \operatorname{Im} P_2$.

6.7. Докажите, что каждый ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве является линейной комбинацией четырех унитарных операторов.

Подсказка: см. рис.



6.8. (a)-(c) Для каждого оператора T из задачи 6.4 и произвольной ограниченной борелевской функции $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ задайте оператор $f(T)$ явной формулой.

6.9. Верны ли для борелевского исчисления теоремы **(a)** об отображении спектра и **(b)** о композиции?

6.10-B. Сформулируйте и докажите теоремы о непрерывном и борелевском исчислениях для унитарного оператора. (*Указание:* видоизмените доказательство теоремы о непрерывном исчислении для самосопряженного оператора, используя лорановские многочлены на окружности вместо многочленов на прямой.)

6.11-B. Докажите, что ограниченный линейный оператор U в гильбертовом пространстве унитарен **(a)** тогда и **(b)** только тогда, когда он имеет вид $U = \exp(iT)$ для некоторого самосопряженного оператора T.

6.12-B. Докажите, что группа $\mathrm{U}(H)$ унитарных операторов и группа $\mathrm{GL}(H)$ обратимых ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H линейно связны.

6.13. Найдите полярные разложения следующих операторов:
(a) ортогональный проектор в гильбертовом пространстве;
(b) диагональный оператор M_λ в ℓ^2 (где $\lambda \in \ell^\infty$);
(c) оператор умножения M_φ в $L^2(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой, $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ — ограниченная измеримая функция);
(d) оператор сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$;
(e) оператор правого сдвига в ℓ^2;
(f) оператор левого сдвига в ℓ^2.

6.14. Верно ли, что любой ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве H можно представить в виде $T = US$, где S — положительный, а U — унитарный оператор в H?

6.15. Докажите, что компактный самосопряженный оператор является циклическим **(a)** тогда и **(b)** только тогда, когда все его собственные значения однократны.

6.16. Докажите, что оператор умножения $M_\varphi\colon L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ на строго монотонную функцию $\varphi \in C[a,b]$ является циклическим.

6.17. Оператор T в пространстве $L^2[0,1]$ действует по формуле $(Tf)(t) = \sqrt{t} f(t)$. Найдите в явном виде меру μ и унитарный изоморфизм $U\colon L^2[0,1] \to L^2([0,1],\mu)$, осуществляющий эквивалентность между T и M_t.

6.18-B. Пусть T — циклический самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Докажите, что оператор $S \in \mathscr{B}(H)$ коммутирует с T тогда и только тогда, когда $S = f(T)$ для некоторой ограниченной борелевской функции $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$.

6.19-B. Пусть $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная борелевская функция. Докажите, что если оператор умножения $M_\varphi\colon L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ является циклическим, то существует множество $A \subset [a,b]$ лебеговой меры нуль, на дополнении к которому φ — инъекция[1].

6.20. **(a)** С помощью спектральной теоремы докажите, что ограниченный самосопряженный оператор P, удовлетворяющий условию $\sigma(P) \subseteq \{0,1\}$, является проектором.
(b) Докажите то же самое, не используя спектральную теорему.

6.21. **(a)-(c)** Опишите спектральные меры операторов из задачи 6.4.

6.22. Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, и пусть E — его спектральная мера. Докажите, что T компактен тогда и только тогда, когда $E(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ для некоторого не более чем счетного компакта $K \subset \mathbb{R}$, каждая ненулевая точка λ которого изолирована в K и такова, что проектор $E(\{\lambda\})$ имеет конечномерный образ.

6.23-B. Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Докажите, что множество компактных операторов $\mathscr{K}(H)$ — это единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(H)$.

Указание. Пусть $I \subset \mathscr{B}(H)$ — замкнутый двусторонний идеал. Имитируя известное доказательство простоты алгебры матриц, докажите, что I содержит все одномерные операторы (а значит, содержит и $\mathscr{K}(H)$). Если I содержит хотя бы один некомпактный оператор, то воспользуйтесь спектральной теоремой.

[1] Обратное также верно, но опирается на довольно тонкие факты из теории меры. Кстати, пользуясь этим обратным утверждением, можно построить непрерывную немонотонную функцию $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, для которой оператор M_φ является циклическим.